

Lösningförslag till dugga 2, LMA 212, 20171012

1.

$$\det \mathbf{A} = 30, \quad \det \mathbf{B} = adfg$$

2. (a) $\det \mathbf{A}' = \det \mathbf{A}$
 (b) $\det \mathbf{A}' = -\det \mathbf{A}$
 (c) $\det \mathbf{A}' = c \det \mathbf{A}$

3.

$$\frac{\begin{matrix} \text{(a)} & F & \text{(b)} & S & \text{(c)} & S \\ \text{(d)} & S & \text{(e)} & S & \text{(f)} & S \end{matrix}}$$

4. (a) $T = \frac{\|\vec{PQ} \times \vec{PR}\|}{2}$.

(b) $V = \frac{|\vec{PS} \cdot [\vec{PQ} \times \vec{PR}]|}{6}$.

(c) abc .

5. Volymen är

$$V = |\mathbf{c} \cdot [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = |abc|.$$

6. (a) 12.

(b) $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = 0$

(c) Termen $(-1)^p a_{1,4} a_{2,3} a_{3,2} a_{4,1}$ i $\det \mathbf{A} = \det(a_{jk})_{4 \times 4}$. För att bestämma p beräkna vi antal inversioner för kolonnindexen tills vi får kanonisk ordning:

$$\begin{matrix} (4, 3, 2, 1), & (4, 2, 3, 1), & (4, 2, 1, 3), \\ (4, 1, 2, 3), & (1, 4, 2, 3), & (1, 2, 4, 3), \\ (1, 2, 3, 4) \end{matrix}$$

Alltså är antal inversioner $p = 6$ (så termen är $a_{1,4} a_{2,3} a_{3,2} a_{4,1}$).

Alternativt utvecklar vi determinanten längs rad 1. Termer som innehåller $a_{1,4}$ i

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix}$$

återfinns i

$$(-1)^{1+4} a_{1,4} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix}$$

Termer som innehåller $a_{2,3}$ fås genom utveckling längd rad 1 och återfinns som term i

$$(-1)^{1+4} a_{1,4} (-1)^{1+3} a_{2,3} \begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} \end{vmatrix}$$

där termen är $-a_{1,4} a_{2,3} (-a_{3,2} a_{4,1})$. ($p = 2$ eller ngt jämnt tal)

Man kan till sist, som alternativt göra "fjärrbyte".

$$(4, 3, 2, 1) \sim (1, 3, 2, 4) \sim (1, 2, 3, 4)$$

d.v.s. $p = 2$. Tecknet blir detsamma ty p jämnt oberoende lösningsmetod.