Lösningsförslag till Dugga vid Chalmers tekniska högskola i Linjär algebra (matematik), kurskod LMA 212, för DAI och EI, tisdag e.m. 2016-12-20

1. Givet matriserna nedan

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} x & y & z \\ s & t & u \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   (a) Produkter, som är möjliga...

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}.$$

1.0p

   (b) Typerna för produkterna i (a):

$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}$
2×4	3×1	2×1

1.0p

2. Följande matris är ett ekvationssystem på matrisform i variablerna x, y, z, och u.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

   (a) rang koefficientmatris=rang totalmatris= 3. 1.0p

   (b) Antal lösningar till ekvationssystemet är ∞. 1.0p

   (c) Lösning av ekvationssystemet:

$$u = 1, \; z = -2, \; y = 6 - x, \; x \in \mathbb{R}.$$

1.0p

3. Givet matrisekvationen

$$\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{X}\,.$$

   (a) Lös ut matrisen $\boldsymbol{X}$ uttryckt i de två andra matriserna:

$$\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{X} \Longleftrightarrow \boldsymbol{X}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{B} \Longleftrightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I})^{-1}.$$

2.0p

   (b) $\boldsymbol{A}$ är kvadratisk.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{X}$
2×2	$3 \times$	$3 \times$
2×2	3×2	3×2

1.5p

4. (a)

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B}^{-1}$$

   är falsk. Motexempel:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{d} & -\frac{1}{d} \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{d} \\ 1 & -\frac{1}{d} \end{bmatrix}$$

   och vi ser att $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1} \neq \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B}^{-1}$. 2.0p

   (b) $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$ är sann. Bevis

$$... = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot [\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}] \cdot \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot I \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}.$$

2.0p

5. Matrisen $\boldsymbol{B}$ av typ 4×4.

   (a)

$$\det \boldsymbol{A} := \begin{vmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} & a_{1\,4} \\ 0 & 0 & a_{2\,3} & a_{2\,4} \\ 0 & 0 & a_{3\,3} & a_{3\,4} \\ 0 & 0 & 0 & a_{4\,4} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot 0 \cdot a_{3,3} \cdot a_{4,4} = 0.$$

   (b) $\det(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \det \boldsymbol{A} \cdot \det \boldsymbol{B} = 0 \cdot \det \boldsymbol{B} = 0.$

2.0p, 2.0p

6. Vektorerna $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är vektorer i $\mathbb{R}^3$.

   (a)

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \{\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\} = 0.$$

1.5p

   (b)

$$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}.$$

1.0p

   (c)

$$|\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})| - |\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = \{\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\} = |\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| \sin 90^\circ - |\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = 0.$$

2.5p

7. Antag att $\boldsymbol{A}$ är en inverterbar matris. Visa att...

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^T \cdot \boldsymbol{A}^T = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1})^T = \boldsymbol{I}^T = \boldsymbol{I}.$$

3.5p