# 1 Linje och plan i $\mathbb{R}^3$

**Ex I:** Givet linjerna

$$L_1 : \begin{cases} x = t+1 \\ y = -4t-2 \\ z = t+4 \end{cases} \quad \text{och } L_2 : \begin{cases} x = -t-2 \\ y = t+7 \\ z = -4t-2 \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vi kan se linjerna som två flygplans kurser med $t$ som tidsparameter. Nu kan dessa kurser korsa varandra, inte så vanligt och dessutom inte vid samma tid $t$. Vi skall försöka beräkna skärningen mellan linjerna. Om den finns, kan den ske vid olika tidpunkter, d.v.s. för olika $t$. Därför byt $t$ mot $s$ för linje $L_2$. Vi får ändå ett överbestämt ES:

$$\begin{cases} x & = t+1 = -s-2 \\ y & = -4t-2 = s+7 \\ z & = t+4 = -4s-2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} s+t & = -3 \\ s+4t & -9 \\ 4s+t & = -6 \end{cases}$$

Vi kan skriva detta överbestämda ES på matrisform och får en lösning $s = -1$ och $t = -2$. Genom insättning ger det skärningspunkten, som är $(x; y; z) = (-1; 6; 2)$.

**Kommentarer**

Man kan visa att

$$\begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} =: \boldsymbol{A}_L^{-1}$$

är vänsterinvers till koefficientmatrisen. Eftersom det tydligen finns en lösning, fås den med vänterinversen:

$$\boldsymbol{A}_L^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -9 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -9 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$$

**Ex II:** Beräkna vinkeln mellan linjerna i föreg. ex.

**Lösning:**

Vinkeln definieras som vinkeln mellan riktningsvektorerna, om den är spetsig eller rät. Annars $\pi$ (180°) minus vinkeln mellan vektorerna. Vinkeln $\theta$ mellan vektorerna uppfyller

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2}{||\boldsymbol{v}_1|| ||\boldsymbol{v}_2||} = \frac{-9}{18} \Longleftrightarrow \theta = 120°$$

men eftersom denna vinkel är trubbig är vinkeln mellan linjerna $180° - 120° = 60°$ (Svar).

**Ex III:** Givet planen

$$\begin{cases} \Pi_1: & x - 4y + z - 1 = 0 \\ \Pi_2: & -x + y - 4z - 5 = 0 \end{cases}$$

Beräkna skärningen mellan planen.

**Lösning:**

Dessa ekvationer på matrisform är

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & 5 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right],$$

som är ett underbestämt ES. Med $z = t$, en parameter, blir lösningen

$$(x, y, z) = t(-5, -1, 1) + (-7, -2, 0),\ t \in \mathbb{R},$$

alltså en linje med riktningsvektor $\boldsymbol{v} = (-5, -1, 1)$.

**Alt. lösn.** För att få riktningsvektorn $\boldsymbol{v}$, ser vi att den är vinkelrät mot planens normalvektorer. Alltså kan vi välja

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \dots = (15, 3, -3) = 3(5, 1, -1).$$

Denna vektor är antiparallell med den tidigare erhållna riktningsvektorn. Vi väljer $\boldsymbol{v}_1 := (5, 1, -1)$. Nu behöver vi bara en punkt som uppfyller ES, ex.vis $P = (-2; -1; -1)$. Detta ger linjens ekvation

$$(x, y, z) = t(5, 1, -1) + (-2, -1, -1), \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

**Ex IV:** Beräkna vinkeln mellan planen i föreg. ex.

**Lösning:**

Vinkeln mellan planen är vinkeln mellan deras normalvektorer (Rita!), om vinkeln är spetsig eller rät (Jämför vinkel mellan linjer). Eftersom normalvektorerna är desamma som linjernas riktningsvektorer, är lösningen densamma, alltså $\theta = 60°$ (Svar).

**Avstånd mellan objekt** Givet ett plan $\Pi$ med ekvation $(x; y; z):\ Ax + By + Cz + D = 0$, där en normalvektor till planet är $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$. Givet en punkt $S$. Vad är avståndet mellan planet och punkten?

**Lösning:**

**Definition 1** Med avståndet mellan två objekt menas det minsta avståndet.

Vi har tidigare beräknat en tetraeders volym med bas(-triangel) i planet $\Pi$. Tetraederns höjd är avståndet mellan $S$ och $\Pi$.

Genom att rita planet $\Pi$, tetraedern med höjd $h$ inser vi att $h = d$.

Vi har sambandet för tetraederns volym

$$V = \frac{|\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{6} = \frac{h \cdot T}{3}.$$

Här är $2T = ||\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}||$, så att

$$6V = |\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = h \cdot ||\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}||$$

eller ekvivalent

$$h = \frac{|\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{||\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}||}.$$

**Ex V:** Beräkna avståndet $d$ mellan punkten $S = (4; 7; 1)$ och planet som innehåller punkterna $P = (1; 2; 0)$, $Q = (2; 3; 4)$ och $R = (5; 3; 1)$,

**Lösning:**

Bilda vektorerna

$$\overrightarrow{PQ} = (1, 1, 4),\ \overrightarrow{PR} = (4, 1, 1) \text{ och } \overrightarrow{PS} = (3, 5, 1).$$

Då är

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = 3(-1, 5, -1)$$

och därmed

$$||\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|| = 9\sqrt{3} \text{ och } \overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = 63.$$

Svar: Detta ger det sökta avståndet (höjden)

$$h = d = \frac{63}{9\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3} \text{ l.e.}$$

**kommentarer:**

- Det minsta avståndet är det *vinkelräta* avståndet p.g.a. att planet inte har "kanter".
- Det är klart att vi kan använda $\boldsymbol{n} := (-1, 5, -1)$ i både täljare och nämnare. Räkningarna blir dessutom lite enklare:

$$d = \frac{|(3, 5, 1) \cdot (-1, 5, -1)|}{||(-1, 5, -1)||} = \frac{21}{3\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3} \text{ l.e.}$$

**Planets ekvation** Planets ekvation kan med beteckningar ovan, skrivas om. Vi skrivert normalvektorn som

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} =: \boldsymbol{n} =: (A, B, C).$$

Med $P$ som en punkt i planet och $(x; y; z)$ som en godtycklig punkt i planet, får vi att planets ekvation är

$$\boldsymbol{n} \cdot ((x, y, z) - \overrightarrow{OP}) = 0.$$

Vi utvecklar VL och sätter $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$.

$$Ax + By + Cz - (A, B, C) \cdot \overrightarrow{OP}.$$

I planets allmänna form $Ax + By + Cz + D = 0$ måste alltså

$$D = -\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{OP} = -(A, B, C) \cdot \overrightarrow{OP}.$$

Planets ekvation kan slutligen skrivas

$$\begin{array}{rcl} Ax + By + Cz + D & = & 0 \\ & \text{där} & \\ \boldsymbol{n} = (A, B, C) & \text{och} & D = -\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{OP}. \end{array} \tag{1}$$

**Avstånd punkt - plan** Vi har att avståndet ges av

$$d = \frac{|\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{||\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}||}.$$

Vi skriver nu om detta uttryck.
Nämnaren är

$$||\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|| = ||\boldsymbol{n}|| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

I täljaren sätter vi punkten $S = (x; y; z)$, så att $\overrightarrow{PS} = (x, y, z) - \overrightarrow{OP}$. I VL vid härledning av planets ekvation får vi

$$|Ax + By + Cz - (A, B, C) \cdot \overrightarrow{OP}| = |Ax + By + Cz + D|.$$

**Ex VI** Bestäm avståndet mellan planet $\Pi : 2x - 4y + 4z = 2$ och punkten $(1; 4; 1)$.

**Lösning:**

Dividera planets ekvation med 2, så att den blir

$$x - 2y + 2z - 1 = 0.$$

Avståndet är alltså

$$d = \frac{|1 - 2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|-6|}{3} = 2 \text{ l.e.}$$