October 4, 2016

Introduktion till Komplexa tal

HT 2014 CTH Lindholmen

Index

Kapitel 1

Komplexa tal

1.1 Definition och jämförelse med $\mathbb{R}^2$

Talplanet $\mathbb{R}^2$

De komplexa talplanet $\mathbb{C}$

1.1.1 Likheter mellan $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{C}$

I båda talplanen ges en ortsvektor/punkt av två koordinater (x och y). Vektorerna har samma längd $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ respektive $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Båda dessa bildar samma vinkel med den positiva $x-$axeln respektive med den positiva realaxeln /betecknad med Re .). Vinkeln α i figurerna räknas positiv från dessa axlar vid vridning moturs. I det komplexa talplanet kallas denna vinkel "argument" som skrivs "arg": $\arg z = \alpha$. I $\mathbb{R}^2$ skrivs talet $P = (x; y)$ och motsvarande ortsvektor $\boldsymbol{a} = (x, y)$.

- I $\mathbb{C}$ skrivs talet $z = x + jy$, där j (eller i) kallas den imaginära enheten.
- I figuren t.h. ovan, är $z = 3 + j\,2$ och $|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$. $\arg z = \alpha = \arctan(2/3)$.
- $\operatorname{Re} z = 3$, $\operatorname{Im} z = 2$.
- Ett komplext tal $z = x + 0 \cdot j = x$, där x är reellt, kallas *rent reellt.*

- Ett komplext tal $z = 0 + y \cdot j = y\,j$, där y är reellt, kallas *rent imaginärt.*
- För x, y, a, b reella och $x + jy = a + jb$, så är $x = a$ och $y = b$.
- För $z = x + jy$, så är $\overline{z} = x - jy$ och kalla komplexkonjugatet till z.
- *Längden av* $z = x + i\,y$, där x, y är reella, ges av

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

- Det är klart att $\overline{\overline{z}} = z$.

Sats 1.1 Följande lagar gäller för komplexkonjugat.

$$\begin{aligned} \overline{z+w} &= \overline{z} + \overline{w} \\ \overline{z-w} &= \overline{z} - \overline{w} \\ \overline{z \cdot w} &= \overline{z} \cdot \overline{w} \\ \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} &= \frac{\overline{z}}{\overline{w}} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Sats 1.2

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i} \tag{1.2}$$

Sats 1.3 Följande lagar gäller för absolutbelopp $|\cdot|$.

$$\begin{aligned} |z \cdot w| &= |z| \cdot |w|\,, \\ \left|\frac{z}{w}\right| &= \frac{|z|}{|w|}\,, \\ |z + w| &\leq |z| + |w|\,, \\ |z|^2 &= z \cdot \overline{z}\,. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Ex 1.1 Beräkna $\dfrac{z - \overline{z}}{2i}$, om $z = x + i\,y$, x och y reella.

Lösning

$$\frac{z - \overline{z}}{2i} = \frac{(x + i\,y) - (x - i\,y)}{2i} = \frac{2i\,y}{2i} = y (= \operatorname{Im} z)\,.$$

■

1.1.2 Räknelagar för komplex tal

Ex 1.2 Låt $w = 5 - j$ vara ett annat komplext tal. Då är

$$2z = 2(3 + 2j) = 6 + 4j, \quad z + w = 3 + 2j + 5 - j = 8 + j$$

P.s.s. utför man en substraktion mellan två komplexa tal. För multiplikation

$$z \cdot w = 15 + 7j - 2j^2\,.$$

■

Vi behöver nu en definition av j^2 och den är

$$j^2 = -1 \tag{1.4}$$

Som konsekvens får vi att

$$j = j,\ j^2 - 1,\ j^3 = -j,\ j^4 = 1,\ j^5 = j \text{ o.s.v.}$$

Observera att

$$\frac{1}{j} = \frac{1}{j} \cdot \frac{-j}{-j} = \frac{-j}{j(-j)} = \frac{-j}{1} = -j\,.$$

Ex 1.3 Lös ekvationen $\overline{z} + 4j\,z = 7 - 2j$.

Lösning

Sätt $z = x + jy$, där x och y är reella. Vi får då ekvationen

$$x - jy + 4jx - 4y = 7 - 2j \iff \begin{cases} \text{Re}\,;\ x - 4y = 7 \\ 4x - y = -2 \end{cases} \iff x = -1,\ y = -2$$

$$\text{så att } z = -1 - 2j\,.$$

■

Ex 1.4 Förenkla...

$$\frac{z^2 + 4}{z - 2i} = \frac{z^2 - (2i)^2}{z - 2i} = \frac{(z - 2i)(z + 2i)}{z - 2i} = z + 2i\,.$$

■

Ex 1.5 Beräkna vinkeln mellan $z = 3 + 2i$ och $w = 5 - i$.

Lösning

Vi kan skriva om $z = (3, 2)$ och $w = (5, -1)$ och beräkna vinkeln med skalär produkt. Vi kommer dock att ha en annan metod att beräkna vinkeln med. Vi skalla häar bara ta och beräkna

$$\frac{z}{w} = \frac{3 + 2i}{5 - i} \cdot \frac{5 + i}{5 + i} = \frac{13 + 13i}{26} = \frac{1}{2}(1 + i)\,.$$

■

1.2 Polynom med komplexa koefficienter

Ex 1.6 Lös ekvationen $f(z) := z^2 + 2z + 5 = 0$,

Lösning

$$z^2 + 2z + 5 = (\text{k.k}) = (z+1)^2 + 4 = 0 \iff (z+1)^2 = -4 = (2i)^2 \iff$$

$$\iff z + 1 = \pm 2i \iff z = -1 + 2i \text{ eller } z = -1 - 2i\,.$$

Om vi har nollställena till $f(z)$ så har vi även faktoruppdelningen av $f(z)$ (Faktorsatsen). Alltså

$$f(z) = z^2 + 2z + 5 = (z + 1 - 2i)(z + 1 + 2i)\,.$$

■

Ex 1.7 Betrakta polynomet $z^2 - (2 - i)z + (2 - 4i) =: g(z)$.

(a) Lös ekvationen $g(z) = 0$.

(b) Skriv $g(z)$ som en produkt av polynom av grad 1.

Lösning

(a) Ekvationen är

$$g(z) = z^2 - (2-i)z + (2-4i) = \{\text{k.k.}\} =$$

$$= z^2 - 2z(1 - i/2) + (1 - i/2)^2 - (1 - i/2)^2 + 2 - 4i = 0\,.$$

$$(z - (1 - i/2))^2 = -2 + 4i + (1 - i/2)^2 = -\frac{5}{4} + 3i$$

Vi ansätter nu $-\frac{5}{4} + 3i$ som en jämn kvadrat:

$$-\frac{5}{4} + 3i = (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2i\,ab$$

Vi identifierar real- och imaginärdel i VL och HL men även absolutbeloppen av båda led. VL: $|-5/4 + 3i| = \sqrt{\frac{25 + 144}{16}} = \frac{13}{4}$.

	VL		HL
Re :	$-5/4$	$=$	$a^2 - b^2$
Im :	3	$=$	$2ab$
Abs :	$\frac{13}{4}$	$=$	$a^2 + b^2$

Genom att addera 1:1 och 3:e ekvation ledvis får vi

$$\frac{8}{4} = 2 = 2a^2 \iff a = \pm 1\,.$$

Ekvation 2. ger då att $a = 1$ motsvarar $b = 3/2$, så att $a + ib = \pm(1 + 3i/2)$. Nu är

$$z - 1 + i/2 = \pm(1 + 3i/2) \iff$$

$$z = 1 - i/2 \pm (1 + 3i/2) \iff \begin{cases} z = 1 - i/2 + 1 + 3i/2 = 2 + i \\ \text{eller} \\ z = 1 - i/2 - 1 - 3i/2 = -2i \end{cases}$$

(b) $g(z)$ som en produkt av polynom av grad 1:

$$g(z) = (z - (2+i))(z - (-2i)) = (z - 2 - i)(z + 2i)\,.$$

■

1.3 Polynom av högre grad

För polynom av grad 3 och högre betraktar vi bara de som har reella koefficienter. Vi såg att $z^2 + 2z + 5$ är ett poynom med enbart reella koefficienter 1, 2 och 5 . De två nollställena är *komplexkonjugerade*. Detta är ingen tillfällighet.

> **Sats 1.4** Antag att $f(z)$ är ett polynom med enbart reella koefficienter (d.v.s. ett reellt polynom). Antag vidare att $z_0 = x_0 + i\,y_0$ är ett nollställe. Då är även $\overline{z_0} = x_0 - i\,y_0$ ett nollställe.

Ex 1.8 Polynomet $f(z) = 2z^3 + z^2 + 18z + 9$ har ett rent imaginärt nollställe. Lös ekvationen $f(z) = 0$ och faktoruppdela $f(z)$ i komplexa och reella faktorer.

Lösning

Ett nollställe är alltså $z_1 = b\,i$ och ett är $z_2 = -b\,i$ för något reellt tal b. Alltså är

$$(z - ib)(z + ib) = z^2 + b^2$$

en faktor. Vi kan dividera polynomet med denna faktor och på så sätt få ut både värdet på b och den tredje faktorn. Alternativt kan vi sätta in $\pm ib$ i polynomet och få 4 ekvationer. Oftast räcker det med en av dessa för att kunna betämma b.

$$f(i\,b) = -2ib^3 - b^2 + 18ib + 9 = 9 - b^2 + i(-2b^3 + 18b) = 0 \iff \begin{cases} b^2 = 9 \\ 18b = 2b^3 \end{cases}$$

Båda ekvationerna ger att $b = \pm 3$. Ett nollställe är alltså $z_1 = 3i$ och ett är $z_2 = \overline{z_1} = -3i$. Det tredje nollstället till polynomet fås via polynomdivision med $z^2 + 9$:

$$f(z) = (z^2 + 9)(2z + 1)$$

■

1.4 Polär form, polära koordinater

Ex 1.9 Det komplexa talet $z = 3 + 2i$, sett som vektor, har längden $\sqrt{13}$. Den bildar vinkeln α med positiva realaxeln. Samband: $\tan\alpha = \dfrac{2}{3}$. Eftersom α är spetsig (ligger i 1:a kvadrant) är $\alpha = \arctan(2/3)$. Vinkeln kallas "argumentet av z" och skrivs $\arg z$. I detta fall är $\arg(3 + 2i) =$

arctan(2/3). P.s.s. är $\arg(5-i) = \arctan(-1/5) - \arctan(1/5)$. Dessa är den andra polära koordinaten. Den första är deras längder.

$$r_1 = |z| = \sqrt{3^3 + 2^2} = \text{ eller } = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{3^3 - (2i)^2} = \sqrt{13}\,.$$

Och p.s.s.

$$r_2 = |w| = \sqrt{26}\,.$$

Alltså är

$$z = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha) \text{ och } w = r_2(\cos\beta + i\sin\beta)\,.$$

■

1.4.1 Multiplikation och division mellan komplexa tal på polär form

Vi kan skriva multiplikationen $z \cdot w$ på denna *polära form* som

$$z \cdot w = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot (\cos\beta + i\sin\beta)\,.$$

Det som vi kan utveckla är

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot(\cos\beta + i\sin\beta) = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

Vi skriver om HL med trigonometriska identiteter.

$$\begin{cases} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)\,. \end{cases}$$

Vi ser att

$$z \cdot w = r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)]\,.$$

Vi observerar att konjugatet till $\cos\beta + i\sin\beta$ är $\cos\beta - i\sin\beta$. Multiplikationen

$$(\cos\beta + i\sin\beta)\cdot(\cos\beta - i\sin\beta) = \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1\,.$$

Alltså är

$$|\cos\beta + i\sin\beta| = 1\,.$$

P.s.s. kan vi ta division mellan komplexa tal på polär form.

$$\frac{z}{w} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta}$$

Vi förenklar

$$\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta} \cdot \frac{\cos\beta - i\sin\beta}{\cos\beta - i\sin\beta} = \frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta)}{1} =$$

$$\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)\,.$$

Vi ser att multiplikation (division) ger addition (subtraktion) mellan "argumenten" d.v.s. mellan vinklarna. Detta ger en anledning att definiera

Definition 1.1
$$\cos\alpha + i\sin\alpha =: e^{i\alpha}\,. \tag{1.5}$$

Vi får genast

1. $e^{-i\alpha} = \dfrac{1}{e^{i\alpha}}\,.$

2. $\dfrac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i(\alpha-\beta)}\,.$

3. $$(e^{i\alpha})^2 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha = e^{i\cdot 2\alpha}\,.$$

4. Vi kan generalisera den sista likheten (identiteten) till *Moivres formel*
$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha),\; n = 0, 1, 2, 3, ... \tag{1.6}$$
som också gäller för negativa heltal.

Ex 1.10 Några specialfall för med komplext tal på polär form.
$$i = e^{\pi/2\, i},\quad -1 = e^{\pi\, i},\quad e^{-\pi/3} = \cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3) = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

■

Ex 1.11
$$e^{-i\,\alpha} = \frac{1}{e^{i\,\alpha}} = \overline{e^{i\alpha}}\,.$$

■

Ex 1.12 Skriv det komplexa talet $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$ på polär form.

Lösning

$r = |z| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Argumentet α: Vi börjar med
$$\arctan\left(-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\right) = -\arctan\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}\,.$$
Vinkeln α ligger dock i andra kvadrant och fås genom att addera π. Alltså är $\alpha = \dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{4\pi}{3}$. Allså är
$$z = -\sqrt{2} + i\sqrt{6} = 2\sqrt{2}\, e^{4\pi\, i/3}\,.$$

■

Ex 1.13 Bestäm vinkeln mellan $z = 3 + 2i$ och $w = 5 - i$.

Lösning

Vi ritar de komplexa talen som vektorer.

Vinklarna är $\alpha = \arctan(2/3) > 0$ och $\beta = \arctan(-1/5) < 0$[1]. Vinkeln mellan z och w är alltså $\alpha - \beta =: \theta$. Vi kan få vinkeln θ genom att först iaktta att

$$\frac{z}{w} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\alpha-\beta)}$$

och att

$$\frac{z}{w} = \frac{1}{2}(1+i) = re^{i\,\pi/4} \text{ där } r = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Alltså är vinkeln mellan z och w vinkeln $\theta = \alpha - \beta = \dfrac{\pi}{4}(= 45^\circ)$.

■

Ex 1.14 Vad innebär multiplikation mellan $e^{i\theta}$ och ett komplext tal z?

Lösning

Det komplexa talet kan skrivas på polär form $z = r\,e^{i\alpha}$, där $r = |z|$ och $\alpha = \arg z$. Multiplikationen kan alltså skrivas

$$e^{i\theta} \cdot z = e^{i\theta} \cdot r\,e^{i\alpha} = r\,e^{i(\theta+\alpha)}$$

d.v.s. vi får ett nytt komplext tal med samma längd som z men med ett argument $\theta + \alpha$, d.v.s. ett komplext tal som är lika långt som z men vridet vinkeln θ moturs.

■

1.5 Binom

Ett binom är ett polynom med (bara) två termer.

[1] Vinklarna kan räknas i grader eller radianer.

1.5.1 Binomisk ekvation

en binomisk ekvation kan skrivas binom = 0.
Ex 1.15 Betrakta binomet $f(z) := z^3 + 8$

(a) Lös den binomiska ekvationen $f(z) = 0$

(b) Fakroduppdela binomet i komplexa och reella faktorer.

Lösning

(a) Vi skriver om ekvationen som $z^3 = -8$ och sedan skriver VL och HL på polär form.

$$\begin{array}{ll} \text{VL} & z = r\,e^{i\alpha} \Longrightarrow z^3 = r^3 e^{i\,3\alpha} \\ & \\ \text{HL} & -8 = e^{i\,pi} \end{array} \Longrightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \Longleftrightarrow r = 2 \\ \\ 3\alpha = \pi + 2\pi\, n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Det visar sig räcka sätta $n = -1, 0, 1$ eller n till tre *konsekutiva* heltal. Vi får

$$n = -1: \quad \alpha_1 = -\pi/3 \quad z_1 = 2\,e^{-i\,\pi/3} = 2(1/2 - i\sqrt{3}/2) = 1 - i\sqrt{3}.$$

$$n = 0: \quad \alpha_2 = \pi/3 \quad z_2 = 2\,e^{i\,\pi/3} = 2(1/2 + i\sqrt{3}/2) = 1 + i\sqrt{3}.$$

$$n = 1: \quad \alpha 2 = \pi \quad z_3 = 2e^{i\,\pi} = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2\,.$$

1.

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3 + 8 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = (z - 1 + i\sqrt{3})(z - 1 - i\sqrt{3})(z + 2) = \\ &= ((z-1)^2 - (i\sqrt{3})^2)(z + 2) = (z^2 - 2z + 4)(z + 2). \end{aligned}$$

■

Kommentarer:

- Vi ser att polynomet (binomet) är reellt och har komplexkonjugerade nollställen: $\overline{z_1} = z_2$ och $\overline{2} = 2\,$.
- Genom att sätta $n = 2$ erhålls vinkeln $\alpha_4 = 5\pi/3$. Den vinkeln är inte densamma som z_1 men skillnaden mellan vinklarna är $\pm 2\pi$ alltså ett helt varv. De trigonometriska funktionerna $\cos\alpha$ och $\sin\alpha$ antar alltså samma värde för vinklarna α_1 och α_4.

Ex 1.16 Binomet $g(z) := z^4 + 4$ är givet. Vi skall lösa ekvationen $g(z) = 0$ och faktoruppdela $g(z)$. Vi kan faktiskt faktoruppdela i reella faktorer m.h.a. KK.

$$\begin{aligned} g(z) &= (z^2)^2 + 2^2 = (z^2)^2 + 2 \cdot z^2 \cdot 2 + 2^2 - 4z^2 = \\ &= (z^2 + 2)^2 - (2z)^2 = (z^2 + 2 + 2z)(z^2 + 2 - 2z)\,. \end{aligned}$$

Så långt reella faktorer. För att faktoruppdela i förstagradspolynom, använder i KK igen.

$$z^2 + 2z + 2 = (z + 1)^2 + 1^2 = (z + 1)^2 - i^2 = (z + 1 - i)(z + 1 + i)$$

och p.s.s.

$$z^2 - 2z + 2 = (z-1)^2 + 1^2 = (z-1)^2 - i^2 = (z-1-i)(z-1+i)\,.$$

Alltså är

$$g(z) = z^4 + 4 = (z-1+i)(z-1-i)(z+1+i)(z+1-i)$$

Vi får också de fyra nollställena

$$z_1 = -1+i, \quad z_2 = -1-i, \quad z_3 = 1+i, \quad z_4 = 1-i\,,$$

som vi ser är komplexkonjugerade två och två.

■

Ex 1.17 Lös ekvationen $z^2 = 2i$.

Lösning

Vi skriver om båda led på polär form.

$$z^2 = r^2 e^{2i\alpha} = 2e^{i\pi/2} \Longleftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \\ \alpha = \pi/4 + \pi \cdot n \end{cases} \qquad \text{som ger}$$

$$\begin{array}{llll} n=0 & \alpha_1 = \pi/4 & z_1 = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4} = \sqrt{2}(1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}) = 1+i \\ n=1 & \alpha_2 = 4\pi/4 & z_2 = \sqrt{2}\,e^{i\,5\pi/4} = \sqrt{2}(-1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2}) = -1-i\,. \end{array}$$

■

1.6 Övningar

Uppgift 1.1 Bestäm nollställena till polynomen nedan.

(a) $z^2 + 2z + 2$ (b) $z^2 - 8z + 17$

(c) $z^2 + (2-2i)z - (3+6i)$ (d) $z^2 - (1-i)z + (2-2i)$

■

Uppgift 1.2 Bestäm nollställena till polynomet $z^3 + z^2 + z + 1$. Skriv också polynomet som en produkt av komplexa polynom av grad 1. Ledning: Ett nollställe är imaginärt.

■

Uppgift 1.3 Bestäm nollställena till polynomet $z^3 - 3z^2 + z + 5$. Skriv också polynomet som en produkt av komplexa polynom av grad 1. Ledning: Ett icke-reellt nollställe har realdelen lika med 2.

■

Uppgift 1.4 Bestäm nollställena till polynomet $2z^3 - 3z^2 + 2z + 2$. Skriv också polynomet som en produkt av komplexa polynom av grad 1. Ledning: För ett icke-reellt nollställe är realdelen lika med imaginärdelen.

■

Uppgift 1.5 Lös följande binomiska ekvationer

a) $z^2 + 2j = 0$.

b) $z^3 + 8j = 0$.

■

Uppgift 1.6 Bestäm nollställena till följande binom. Skriv binomen som en produkt av polynom av grad 1.

a) $z^3 - 27$.

b) $z^4 + 4$.

■

Uppgift 1.7 Bestäm nollställena till följande polynom. Skriv polynomen som en produkt av polynom av grad 1.

a) $(z+1)^3 + 64$.

b) $z^3 + 3z^2 + 3z + 2$.

■

Uppgift 1.8

a) Ange nollställena till $z^6 + 1$.

b) Faktoruppdela $z^6 + 1$ i reella faktorer och komplexa faktorer.

■

Uppgift 1.9 Givet matrisen $\boldsymbol{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

a) Låt $\boldsymbol{e}_x = [1 \quad 0]^T$ och $\boldsymbol{e}_y = [0 \quad 1]^T$. Rita $\boldsymbol{A}(\pi/3) \cdot \boldsymbol{e}_x$ och $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_y$.

b) Förenkla

$$\boldsymbol{A}(\pi/3) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_x + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_y \right).$$

c) Rita

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_x + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_y \right) \text{ och } \boldsymbol{A}(\pi/3) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_x + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_y \right).$$

■

Uppgift 1.10 Ett radialekrat hjul kan schematiskt ritas som nollställena till $z^{18} = 1$.

a) Vilken är vinkeln mellan två intilligande ekrar?

b) Rita ekrarna i det komplexa talplanet.

■

Svar

1.1

(a) $z = -1 \pm i$ (b) $z = 4 \pm i$

(c) $z = 1 + 2i$, $z = -3$ (d) $z = 1 + i$, $z = -2i$

1.2

$$\begin{aligned} z_1 &= -1 \\ z_{2,3} &= \pm i \\ z^3 + z^2 + z + 1 &= (z - i)(z + i)(z + 1) \end{aligned}$$

1.3

$$\begin{aligned} z_1 &= -1 \\ z_{2,3} &= 2 \pm i \\ z^3 - z^2 + 2 &= (z - 1 - i)(z - 1 + i)(z + 1) \end{aligned}$$

1.4

$$\begin{aligned} z_1 &= -1/2 \\ z_{2,3} &= 1 \pm i \\ z^3 - 3z^2 + z + 5 &= (z - 1 - i)(z - 1 + i)(2z + 1) \end{aligned}$$

1.5

a) $z = \pm(1 - j)$, $(z^2 + 2j = (z + 1 - j)(z - 1 + j))$

b) $z = 2i$, $z = -1 + j \pm \sqrt{3}$

1.6

a) $z = 3$, $z = \frac{3}{2}(-1 \pm j\sqrt{3})$
$z^3 - 27 = (z - 3)\left(z + \frac{3}{2}(1 + j\sqrt{3})\right)\left(z + \frac{3}{2}(1 - j\sqrt{3})\right)$

b) $z = \pm(1 \pm j)$
$z^4 + 4 = (z - 1 - j)(z - 1 + j)(z + 1 - j)(z + 1 + j)$

1.7

a) $z = -5, \, , z = 1 \pm 2j\sqrt{3}$
$(z+1)^3 + 64 = (z+5)(z-1+2j\sqrt{3})(z-1-2j\sqrt{3})$

b) $z = -2, \; z = \dfrac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2}$
$(z+1)^3 + 1 = (z+2)\left(z + \frac{1}{2}(1+j\sqrt{3})\right)\left(z + \frac{1}{2}(1-j\sqrt{3})\right)$

1.8

a) $z = \pm j, \; z = \dfrac{\pm\sqrt{3} \pm j}{2}$

b) $z^6 + 1 = \left(z^2+1\right)\left(z^4 - z^2 + 1\right) =$
$(z-j)(z+j)\left(z + \dfrac{\sqrt{3}+j}{2}\right)\left(z + \dfrac{\sqrt{3}-j}{2}\right)\left(z - \dfrac{\sqrt{3}+j}{2}\right)\left(z - \dfrac{\sqrt{3}-j}{2}\right)$

1.9

a)

b) $[0 \quad 1]^T$

c)

1.10

a) $20°$

b)