October 3, 2017
Chalmers Tekniska högskola

Innehåll

1 Laboration 1 i matematik, Linjär algebra för DI1 och EI1, ht 2016 i kursen LMA212

Denna laboration syftar till att kunna se möjligheter och svårigheter att lösa matematiska problem inom linjär algebra med ett datorprogram.

1.1 Introduktion till syntax

Varje kommando börjar med versal. Vi inför följande kortkommandon.

$$\begin{aligned} \mathbf{mf} &= \mathbf{MatrixForm}; \\ \mathbf{ri} &= \mathbf{RandomInteger}[\{\mathbf{0}, \mathbf{9}\}]; \\ \mathbf{rr} &= \mathbf{RowReduce}; \\ \mathbf{tp} &= \mathbf{Transpose}; \end{aligned}$$

Paranteser och multiplikation

- ”Argument” eller ”variabel” efter ett kommando sätts innanför $[\,]$, d.v.s. innanför ”fyrkants”paranteser.
- En lista av tal skrivs med ”krull”paranteser (curly brackets), $\{\cdot\}$.
- ”Vanlig” parantes $(\cdot)$ används för distributiva lagen, såsom $2(a+5) = 2a+10$.
- Multiplikation mellan tal a och b skrivs $\mathbf{a} * \mathbf{b}$ eller med mellanslag $\mathbf{a}_\sqcup\mathbf{b}$. Multiplikation mellan listor (Matriser och vektorer) skrivs $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}$.

1.2 Några exempel

Ex 1

- Ex.vis för att integrera kan man, förutom att använda palett, skriva

$$\mathbf{Integrate}[\mathbf{x} \wedge \mathbf{2}, \{\mathbf{x}, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}]$$

och med $\boxed{\text{Enter}}$, $\boxed{\Uparrow}$ aktivera kommandot och erhålla som ”output”

$$\frac{1}{3}\,.$$

Ett kommando, såsom $\mathtt{\mathbf{Integrate}}$ återföljs av $[\mathtt{\mathbf{uttryck}}, \mathbf{x}]$, där **x** är integrationsvariabel. Ett annat sätt att låta ett kommando verka på ett uttryck är att skriva kommandot efter två slashar:

$$\mathbf{uttryck//Simplify}\,.$$

- För att få veta mer om ett kommando, ex.vis om kommandot **Solve** kan man skriva **?? Solve**.
- För att ta bort betydelsen av en egen definierad symbol, ex.vis **A** (Obs! Bokstaven **A** är inget kommando i Mma), skriver man

$$\mathbf{Remove}[\mathbf{A}]$$

- Obs! Använd gemener (små bokstäver) för egna definierade kommandon!

▬

Övning

Gör ovanstående exempel som en övning.

1.2.1 Linjärt ekvationssystem; matrisform

Ex 2 Vi börjar med att skriva upp ett ES i variablerna x och y.

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \quad \updownarrow \text{ (radbyte)} \iff \begin{cases} x - 2y = 1 & \boxed{\cdot(-2)} \\ \\ 2x - y = 5 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x - 2y \\ 3y = 3 & \boxed{\cdot 1/3} \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y = 1 \\ \\ y = 1 & \boxed{\cdot 2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

▬

Ex 3 Vi löser nu detta ES med Mma genom att skriva (Observera att vid ekvationer används två likhetstecken "==".)

$$\mathbf{Solve}[\{\mathbf{2x - y == 5, x - 2y == 1}\}, \{\mathbf{x, y}\}]$$

som aktiveras genom trycka $\boxed{\text{Enter}}$, $\boxed{\Uparrow}$ på tangentbordet. Som output erhålls svaret

$$\{\mathbf{x \to 3, y \to 1}\}$$

.

▬

Ex 4 För att skriva detta ES som en totalmatris (utvidgad matris, augmented matrix), skriver vi helt enkelt

```
AB:={{2,-1,5},{1,-2,1}}
```

Koefficientmatris är alltså

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vi kan få det skrivet som en totalmatris med kommandot

$$\mathbf{MatrixForm}[\mathbf{AB}]$$

som ger

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

eller med kortkommandot $\mathbf{mf}$, som kan användas istället för $\mathbf{MatrixForm}$.
(Man kan också få ihop koefficientmatris och HL genom att skriva måste vi transponera lite.

$$\mathbf{tp}[\mathbf{Join}[\mathbf{tp}[\mathbf{A}], \{\mathbf{b}\}]], \text{ och } \mathbf{tp}[\mathbf{Join}[\mathbf{tp}[\mathbf{A}], \{\mathbf{b}\}]] \backslash\backslash \mathbf{mf}$$

som ger

$$\{\{\mathbf{2}, -\mathbf{1}, \mathbf{5}\}, \{\mathbf{1}, -\mathbf{2}, \mathbf{1}\}\} \text{ respektive } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} .)$$

Vi radreducerar den första matrisen med kommandot $\mathbf{r}r[\cdot]$ och skriver den sedan på matrisform, ex.vis så här

$$\mathbf{mf}[\mathbf{rr}[\mathbf{AB}]]$$

som ger

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att $1 \cdot x + 0 \cdot y = x = 3$ och $0 \cdot x + 1 \cdot y = y = 1$, som tidigare.

▬

1.2.2 Matrisekvation

Ex 5 Vi kan också skriva detta ES som en matrisekvation $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$ med

$$\mathbf{A} = \{\{\mathbf{2}, -\mathbf{1}\}, \{\mathbf{1}, -\mathbf{2}\}\}, \ \mathbf{X} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \text{ samt } \mathbf{B} = \{\mathbf{5}, \mathbf{1}\}.$$

Vi löser detta ES så här (Obs! Tecknet för multiplikation är en punkt mellan faktorerna).

$$\mathbf{Solve}[\mathbf{A}.\mathbf{X} == \mathbf{B}]$$

eller bättre

$$\mathbf{Solve}[\mathbf{A}.\mathbf{X} == \mathbf{B}, \boldsymbol{X}]$$

▬

1.2.3 Determinant och invers matris

Ex 6 Med samma matriser som i exemplet ovan, beräknar vi först determinanten av $\boldsymbol{A}$ genom att skriva

$$\mathbf{Det}[\mathbf{A}]$$

som ger värdet $-3 \neq 0$. och alltså har motsvarande ES en entydig lösning. Vi kan alltså betämma inversmatrisen (inversen) till $\boldsymbol{A}$ på matrisform.

$$\mathbf{Inverse}[\mathbf{A}]//\mathbf{MatrixForm}\,,$$

som ger

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Vi löser ES helt enkelt genom att beräkna

$$\mathbf{Inverse}[\mathbf{A}].\mathbf{b} \text{ som ger } \{\mathbf{3}, \mathbf{1}\}.$$

▬

1.3 Uppgifter till laborationen

Övningar

1. Givet matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, matrisen $\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och matrisen $\boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Hur många lösningar har ekvationen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}_k$ för $k = 1, 2$? Använd kommandot **Solve**.

(b) Bestäm också rangen till koefficient- och totalmatris för $k = 1, 2$.

(c) Beräkna determinanten av koefficientmatrisen. Hur stämmer dess värde med ovanstående frågors svar?

2. Kommandot **ri**, definierat på sidan 1, ger ett slumptal mellan 0 och 9. Bilda en matris

$$\textbf{A=Table[ri,}\{j, 1, 3\}, \{k, 1, 5\}\textbf{]}$$

Se matrisen som en totalmatris för ett ES på matrisform med tre rader och fem kolonner, de fyra första motsvarar variablerna x, y, z och u och den femte kolonnen motsvarar ett högerled. Genom kommandot $\mathbf{rr}[\mathbf{A}]$ får vi en radekvivalent radreducerad matris. Skriv upp lösningen på papper! Hur många lösningar har detta ES?

3. Syntaxen nedan skapar en kvadrat med medelpunkt i origo som, m.h.a. kommandot **Animate** ger en rörelse. Denna rörelse är en vridning av, i detta fall, kvadraten runt origo. Vridningen åstadkoms analytiskt med en ”vridningsmatris” $\mathbf{A}[\mathbf{t}]$, där t är vinkeln i radianer. Mer exakt är

$$\boldsymbol{A}[t] = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Observera att $\sin t$ skrivs $\mathbf{Sin}[\mathbf{t}]$ i Mma. Syntaxen är (kan kopieras direkt in i Mma.)

```
Animate[Graphics[{Arrow[{{-2, 0}, {2, 0}}],{Opacity[0.5],
    Polygon[{{-0.5, -0.5}, {-0.5, 0.5}, {0.5,
        0.5}, {0.5, -0.5}, {-0.5, -0.5}}.A[t]]},
   Line[{{-2, -2}, {-2, 2}, {2, 2}, {2, -2}, {-2, -2}}]}], {t, 0,
  2 Pi}]
```

Vi läser detta utifrån och in.

- Ytterst finns $\mathbf{Animate}[\cdot]$. Detta kommando hänger ihop med att t skall genomlöpa intervallet $\{t : 0 \leq t < 2\pi\}$ och genererar rörelsen (filmen).
- Innanför finns $\mathbf{Graphics}[\{\cdot\}]$.
- Innanför detta kommando, närmare bestämt innanför $[\{\cdot\}]$ finns objekten: Den yttre ramen, en vågrät pil, en linje ritad som en stor kvadrat med sidolängd 4, samt den roterande kvadraten.

Uppgifter till övning 3

(a) Skriv upp syntaxen ovan i Mma och exekvera/aktivera sedan kommandot **Animate**. Vad gör kommandot?

(b) Lägg in en lodrät axel (pil) genom origo med samma längd som den vågräta.

(c) Ändra variabeln i kommandot $\mathbf{Opacity}$. Vad gör kommandot?