September 20, 2017

Linjär algebra motsvarande vad vi tar upp i Lay, Kapitel 1, 2 och 3

Innehållsregister

Kapitel 1

Linjärt ekvationssystem

1.1 Lösning av linjärt ekvationssystem

Vi skall i detta kapitel lösa linjära *ekvationssystem* (ES).

Exempel 1.1 Betrakta följande ES.

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

där vi i det andra ES endast bytt plats på ekvationerna. Genom att multiplicera första ekvation med -2 och sedan addera ekvationen till andra ekvation får vi (Observera att första ekvation står kvar i ursprungligt skick)

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Sista ekvation multiplicerar vi med 2 och adderar sedan till första ekvation. Detta ger

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

som är svaret/lösningen.

■

Kommentarer Man kan rita ekvationerna eftersom de är ekvationer för linjer. Skärningsapunkten för dessa linjer är $x, y = (0, -1)$.

Exempel 1.2 Lös ES

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases} \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Multiplicera 1:a ekv. med } -2 \\ \text{och addera till andra ekv.} \end{array} \right\} \iff \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Sista ekvationen är ju en självklarhet och ger ingen information. Lösningen är alla (x, y) som uppfyller den första ekvationen. Alltså (x, y) sådana att $2x - y = 1$, d..v.s. $y = 2x - 1$. Lösningen kan också skrivas

$$(x, y) = (x, 2x - 1) = x(1, 2) + (0, -1),\ x \in \mathbb{R}$$

■

Kommentarer Geometriskt är lösningen linjen $2x - 1 = y$.

Exempel 1.3
Lös ES

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases} \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Multiplicera 1:a ekv. med } -2 \\ \text{och addera till andra ekv.} \end{array} \right\} \iff \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 0 = -1 \end{cases}$$

Sista ekvationen är en motsägelse. Detta säger att ES saknar lösning.

■

Kommentarer

- I ovanstående tre exempel ser vi att vi har 1, ∞ eler 0 lösningar. Detta är typsikt för alla ES.

Exempel 1.4 Lös ES

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

Lösning

Multiplicera första ekv med -2 och addera till andra ekv. detta för att eliminera $x-$termen i andra ekv. P.s.s. multiplicera 1:a ekv. med -1 och addera till tredje ekv. Detta ger ett ekvivalent ES

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3y - 6z = 3 \\ y - 3z = 1 \end{cases}$$

Multiplicera andra ekv. med 1/3.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ y - 2z = 1 \\ y - 3z = 1 \end{cases}$$

och multiplicera andra ekv. med -1 och addera till tredje ekv.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ y - 2z = 1 \\ -z = 0 \end{cases}$$

Insättning av $z = 0$ i andra ekv. ger $y = 1$ och första ekv. ger $x = 1$.
Svar:Lösningen är $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ och är entydig.

■

EXEMPEL 1.5 P.s.s. kan vi lösa ES

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Detta ES har lösningen

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2z \end{cases}$$

där z kan väljas fritt (fir variabel).
ES

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 3 \\ x = 3 \end{cases}$$

ger en ekvation av typ $1 = 0$, d.v.s. en motsägelse och alltså ingen (noll) lösningar.

■

1.2 Matrisform av ES

EXEMPEL 1.6 Vi skriver om exempel 1.1 på *matrisform.* Då skriver man bara koefficienter och HL.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

I stället för "$\Longleftrightarrow$" skriver vi "$\sim$", alltså

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

De två sista matrierna är på *trappstegsform.* Vi fortsätter genom att multiplicera andra rad (här ekvation) med 2 och adderar till första rad.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

som betyder att $x = 0$ och $y = -1$.

■

EXEMPEL 1.7 Vi ställer upp ES i exempel 1.4 på matrisform.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right], \text{ som betyder att } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

■

Definition 1.1

1. För en matris $\boldsymbol{A}$ av typ $m \times n$ kan skrivas som

$$\boldsymbol{A} = (a_{j,k})_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

   där element på plats j, k,vilket avser rad j och kolonn k är a_{jk}.

2. Om $m = n$ kallas matrisen kvadratisk.

3. För en kvadratisk matris $\boldsymbol{A}$ av ordning n, kallas den diagonala följden $(a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \dots a_{nn})$ *huvuddiagonal*.

Kommentarer

- Vi observerar att antal rader $= m =$antal element i en kolonn och antal kolonner $= n =$antal element i en rad.

- Matrisen $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$ i exempel 1.7 kallas totalmatris (Augmented matrix).

- Matrisen $\left[\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$, i samma exempel, kallas koefficientmatris.

- Totalmatrisen har tre rader och fyra kolonner och är av typ 3×4. Koefficientmatrien är av typ 3×3 och kallas kvadratisk och av ordning 3.

- Om vi betecknar koefficientmatrisen med $\boldsymbol{A}$, skriver man typ $\boldsymbol{A} = 3 \times 3$.

Definition 1.2 De tre Radoperationerna är

R1 Multiplikation av en rad med ett tal och därefter adderas (elementvis) till en annan rad.

R2 Platsbyte på två rader.

R3 Multiplikation av en rad med ett tal $\neq 0$.

- Två matriser $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{A}'$, sådana att man via radoperationerna kommer $\boldsymbol{A}$ till $\boldsymbol{A}'$ kallas radekvivalenta och man skriver det $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}'$.

- Att använda radopertionerna på en matris kallas radelimination.

Kommentarer

- Man kan visa att $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}'$ också innebär att $\boldsymbol{A}' \sim \boldsymbol{A}$, så att $\sim$ är något stil med ekvivalens.

- Hitintills har vi utnyttjat radoperationer för ES men matriser behöver inte vara förknippade med ES.

Definition 1.3

- Det element i en rad som är det första elementet, räknat från vänster, skilt i från 0, kallas *pivotelement*.
- En matris sådan att varje pivotelement i raden ovanför, står till vänster om pivotlementet i raden under sägs ha *trappstegsform* (Echelon form) .
- För en matris på trappstegsform med pivotlementen lika med 1 och övriga element i samma kolonn lika med noll är på radreducerad form (Reduced row echelon form) .
- Antal rader i en matris där minst ett element är $\neq 0$ är en icke-nollrad. Om alla element i raden är $= 0$ kallas raden nollrad.
- Rangen av en matris är antalet icke-nollrader i en radekvivalent matris på trappstegsform.

Kommentarer Antal lösningar till ett ES

Ex 1.1: Totalmatris och koefficientmatris har rangen 2. Antal variabler/obekanta är också 2. Antal lösningar är 1.

Ex 1.2: Totalmatris och koefficientmatris har rangen 1. Antal variabler/obekanta är 2. Antal lösningar är ∞.

Ex 1.3: Totalmatris har rang 1 och koefficientmatris har rangen 2. Antal lösningar är 0.

Sats 1.1 Låt $\boldsymbol{A}$ vara en koefficientmatris, $\boldsymbol{AB}$ en totalmatris samt antal variabler n. Då gäller

$$\begin{aligned} \operatorname{rang}\boldsymbol{A} = \operatorname{rang}\boldsymbol{AB} = n &\iff \text{Antal lösningar } = 1 \\ \operatorname{rang}\boldsymbol{A} = \operatorname{rang}\boldsymbol{AB} < n &\iff \text{Antal lösningar } = \infty \\ \operatorname{rang}\boldsymbol{A} < \operatorname{rang}\boldsymbol{AB} &\iff \text{Antal lösningar } = 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Exempel 1.8 Lös ES

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2y + 3z = 2 \end{cases} .$$

Lösning

På matrisform får vi totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

Den är på trappstegsform. Vi ser att rangen för koefficient- och totalmatris är 2. Alltså finns lösning. Antal variabler är 3. Alltså finns oändligt med lösningar. Vidare är

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right] \text{ på radreducerad form, som betyder } \begin{cases} x - \dfrac{7z}{2} = 0 \\ y + \dfrac{3z}{2} = 1 \end{cases}$$

De variabler som motsvaras av pivotelement kallas bundna, övriga fria. Alltså är x och y bundna och z fri. Man brukar införa en *parameter* för den fria variabeln ex.vis $t = z/2$, som ger lösningen

$$\begin{cases} x = 7t \\ y = 1 - 3t \qquad t \in \mathbb{R}\,. \\ z = 2t \end{cases}$$

■

Kommentarer

- Ett ES med färre ekvationer än obekanta kallas underbestämt, jämför, med it överbestämt ES, exempel 1.9 sidan 13.
- Lösningsmängden, d.v.s. alla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, som uppfyller ES i föregående uppgift är en linje på parameterform.
- ES $x + y - 2z = 1$ har en bunden variabel, ex.vis x och de två övriga är fria. Man kan då införa parametrar $y = s$, $t = z$, så att lösningsmängden kan skrivas

  $$\begin{cases} x = 2t - s + 1 \\ y = s \qquad\qquad ,s, t \in \mathbb{R}\,. \\ z = t \end{cases}$$

  som vi skall senare skall se, är ekvationen för ett plan i $\mathbb{R}^3$.

Exempel 1.9 Lös ES $\begin{cases} -y = 1 \\ x + 3y = 2 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$.

Lösning

Vi löser den med radelimination.

$$\left[\begin{array}{rr|r} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim ... \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Vi ser att rangen för koefficientmatrisen är $2 < 3$ där 3 är rangen för totalmatrisen. Alltså saknas lösning.

■

Kommentarer

- ES ovan har fler ekvationer än variabler och kallas överbestämt (overdetermined).
- De tre ekvationer är ekvationer för linjer i planet $\mathbb{R}^2$ och tre linjer brukar inte skära varandra i *en* punkt.
- Vi skall längre fram lösa detta ES approximativt med Minsta kvadratmetoden (MK-metoden).

1.3 Homogent ES

EXEMPEL 1.10 Lös ES, samma som i exempel 1.5 men med alla HL$=0$.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Lösning

Detta ES har lösningen $x = y = z = 0$ och alltså minst en lösning. ar den fler? På matrisform och med radelimnation får vi

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Vi ser att vid radeleliminationen förblir HL. d.v.s. kolonnn 4 nollkolonnen. Vi ser att vi har z som fri variabel och sätter $z = t$.
Svar:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Kommentarer

- Vi ser att ett homogent ES har åtminstone en lösning, nämligen **0** en kolonn med bara nollor (nollösningen).

■

1.4 Inhomogent ES

Ett ES där HL $\neq \mathbf{0}$ är inhomogent.

EXEMPEL 1.11 I exempel 1.5 har ES

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

lösningen

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2z \end{cases}$$

där z kan väljas fritt (fri variabel). Observera att vi kan skriva lösningen

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases} \qquad \text{eller } (x, y, z) = (1, 1, 0) + t(0, 2, 1),\ t \in \mathbb{R}\,.$$

Vi ser att lösningen består av två termer. Den andra $t(0, 2, 1) = (0, 2t, t)$ känner vi igen som lösningen till motsvarande homogena ES. Den första termen $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ är *en* lösning till det inhomogena ES.

■

1.5 Matrismultiplikation I

EXEMPEL 1.12 Vi visar först hur matriserna $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ kan multipliceras. Speciellt är typ $\boldsymbol{A} = 3 \times 2$ och typ $\boldsymbol{X} = 2 \times 1$. Antal kolonner i $\boldsymbol{A}$ är lika med antal rader i $\boldsymbol{X}$. Det är förutsättningen för att multiplikationen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X}$ *i den* *ordningen* är möjlig. *Produkten* är en matris av typ $3\times \cancel{2}\cdot \cancel{2}\cdot 1 = 3\times 1$. Elementet på plats $(1,1)$ erhålls genom att "multiplicera" rad 1 i $\boldsymbol{A}$ med kolonn 1 i $\boldsymbol{X}$:

$$[a_{11}\, a_{12}]\cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2$$

och p.s.s. elementet på plats $(2,1)$ är rad 2 i $\boldsymbol{A}$ ggr kolonn 1 i $\boldsymbol{X}$

$$[a_{21}\, a_{22}]\cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2\,.$$

Produkten är matrisen

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 \\ a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 \end{bmatrix}.$$

■

Kommentarer

- Denna produkt kan också skrivas m.h.a. kolonnerna som

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}.$$

Definition 1.4

- Vi definierar först multiplikation av en matris $\boldsymbol{A} = (a_{j,k})_{m\times n}$, se (1.1) sidan 10 och ett reelllt (komplext) tal x som matrisen

$$x\,\boldsymbol{A} = (x\, a_{j,k})_{m\times n}$$

- Låt $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Låt $\boldsymbol{a}_k$ vara kolonn nummer k.

  Beteckna kolonn k i $\boldsymbol{A}$, som $\boldsymbol{a}_k$ för $k = 1, 2, ..., n$. Vi definierar multiplikationen $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}$ som

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + ... + x_n\boldsymbol{a}_n\,. \tag{1.3}$$

Kommentarer

- Vi skall ge akt på ordningen som multiplikationen sker. För reellt tal x gånger matris $\boldsymbol{A}$ skriver vi $x\,\boldsymbol{A}$ och kan även skriva $\boldsymbol{A}\,x$.
- För multiplikation mellan matriser, såsom i (1.3) har den betydelse ty multiplikationen skall ses som (byt plats på x_k och $\boldsymbol{a}_k$)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} &= \boldsymbol{a}_1 x_1 + \boldsymbol{a}_2 x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_n x_n = \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{21}x_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12}x_2 \\ a_{22}x_2 \\ \vdots \\ a_{m2}x_2 \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} a_{1n}x_n \\ a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + & a_{2n}x_n \\ \vdots \quad\quad\quad \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + & a_{mn}x_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

- Vi ser ovan principen för matrismultiplikation; rad i $\boldsymbol{A}$ multiplceras med kolonn i $\boldsymbol{X}$. I en produkt såsom $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n$ finns lika många a_{1k}, som x_k, d.v.s. antal kolonner i $\boldsymbol{A}$ och antal rader i $\boldsymbol{X}$ är lika ($= n$). Observera att $\boldsymbol{X}$ endast har en kolonn men ovanstående kan generalieras till en matris $\boldsymbol{X}$ med fler kolonner.

Exempel 1.13 I exempel 1.4 har vi koefficientmatrisen

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vi skall multiplicera med $\boldsymbol{X}$ *från höger.*

Vi multiplicerar $\boldsymbol{A}$ med $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

$$x\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y + 2z \\ 2x + y - 2z \\ x - z \end{bmatrix}$$

som är VL i detta ES. Alltså kan detta ES skrivas

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$

där $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

■

Exempel 1.14 Ibland vill man lösa ett ES med fler olika HL. I exempel 1.4

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 4 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

på matrisform

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|ll} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 4/3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|lr} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -4/3 \end{array}\right] \begin{array}{cc} & \leftarrow \\ \leftarrow & | \\ | & \\ \cdot(-2) & \cdot 2 \end{array} \sim \qquad .$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|lr} 1 & -1 & 0 & 0 & -8/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -4/3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|lc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4/3 \end{array}\right]$$

Svar: De två ES har lösningen

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{respektive} \quad \begin{cases} x = 4/3 \\ y = 4 \\ z = 4/3 \end{cases} \quad .$$

■

Kommentarer

- I dessa två ES är koefficientmatrisen kvadratisk och lösningarna entydiga. Den sista koefficientmatrisen är radreducerad. Denna matris $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =: \boldsymbol{I}$ är viktig, och kallas *enhetsmatrs*. Definition och egenskaper presenteras i nästa kapitel.

- Vi skall senare beräkna invers matris $\boldsymbol{A}^{-1}$ till vissa kvadratiska matriser $\boldsymbol{A}$, detta för att bestämma matrisen $\boldsymbol{X}$, d.v.s. lösa matrisekvationen

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}\,. \tag{1.4}$$

Kapitel 2

Matriser

Vi har redan behandlat matriser och gör nu en definition av begreppet.

2.1 Definition av matris

Definition 2.1 En matris av typ $m \times n$ är ett rektangulärt schema av element.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \ddots & a_{j,k} & \cdots & a_{j,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,k} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} = (a_{j,k})_{m\times n}. \quad (2.1)$$

Om $m = n$ är matrisen kvadratisk och av *ordning* n.

$$[a_{j,1}\, a_{j,2}\, \ldots\, a_{j,n}]$$

är rad j och

$$\begin{bmatrix} a_{1,k} \\ a_{2,k} \\ \vdots \\ a_{m,k} \end{bmatrix}$$

är kolonn k. I denna matris är elementet $a_{j,k}$ är på plats (j, k). Två matriser $\boldsymbol{A} = (a_{j,k})_{m\times n}$ och $\boldsymbol{B} = (b_{j,k})_{p\times r}$ är lika om $m = p$, $n = r$ och $a_{j,k} = b_{j,k}$ för $j = 1, 2, ..., m$ och $k = 1, 2, ..., n$.

2.2 Operationer mellan matriser

- Multiplikation av reellt (komplext) tal och matris sker elementvis.

$$x \cdot \boldsymbol{A} = x \cdot (a_{j,k})_{m\times n} = (x\, a_{j,k})_{m\times n}$$

- För att addera eller subtrahera två matriser måste de vara av samma typ. Additionen sker då elementvis.

- Multiplikation av två matriser är definierat endast då höger $\boldsymbol{X}$ matris har bara en kolonn, av typ $n \times 1$. I det fallet är vänster matris $\boldsymbol{A}$ av typ $m \times n$. Det är viktigt att $\boldsymbol{A}$ har lika många kolonner som $\boldsymbol{X}$ har rader. Vi byter beteckning på höger matris till $\boldsymbol{B}$ som vi antar är av typ $p \times q$.

2.2.1 Matrismultiplikation II m.m.

Definition 2.2 För $\boldsymbol{A} = (a_{jk})_{m\times n}$ och $\boldsymbol{B} = (b_{jk})_{m\times n}$ är additionen, d.v.s. summan

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (a_{jk})_{m\times n} + (b_{jk})_{m\times n} = (a_{jk} + b_{jk})_{m\times n} \,.$$

Matrismultiplikation II
Antag att $\boldsymbol{A}$ är som ovan och att typ $\boldsymbol{B} = p \times q$. Multiplikationen $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ är definierad om $n = p$ och produkten $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ är en matris av typ $m \times q$. Element c_{ik} på plats (i, k) i denna matris är

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = c_{ik} \,.$$

Kommentarer

- Ett reellt (komplext) x kan ses som en $1 \times 1-$matris, $[x]$. och vice versa.

- Observera att

$$c_{ik} = [a_{i1}\, a_{i2} \ldots a_{in}] \cdot \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix}$$

  d.v.s. rad i i $\boldsymbol{A}$ gånger kolonn k i $\boldsymbol{B}$.

- För att veta vilken typ som produkten $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ är, skriver vi

$$(m\times \cancel{n}) \times (\cancel{n} \times q) = m \times q \,.$$

  Alltså är typ $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = m \times q$.

- I allmänhet är $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ och $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ inte lika även om båda produkterna är möjliga., d.v.s. kommutativa lagen gäller inte.

- Däremot gäller associativa lagen för multiplikation, alltså att

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\,. \tag{2.2}$$

- Eftersom den kommutativa lagen inte gäller, delas den distributiva lagen in i en vänster- och högerdistributiv lag.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) &= \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}\,.\\ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}\,.\end{aligned} \tag{2.3}$$

  för matriser $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ och $\boldsymbol{C}$ av lämpliga typer.

Exempel 2.1 Med

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

så multiplikation av $\boldsymbol{A}$ med reellt (komplext) tal -3 ger

$$-3\cdot\boldsymbol{A}=-3\cdot\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 3 & -6\\ -6 & -3 & 6\\ -3 & 0 & 3\end{bmatrix}.$$

Produkten (multiplikationen) $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$ är omöjlig eftersom typ $\boldsymbol{B}=3\times 2$ och typ $\boldsymbol{A}=3\times 3$ och $2\neq 3$. Multiplikationen $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ är dock möjlig och ger en matris av typ 3×2.

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 3 & 3\\ 0 & 3\end{bmatrix}=3\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

där vi i sista ledet brutit ut faktorn 3.

■

Exempel 2.2 Med matriserna $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ är båda produkterna $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ och $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$ möjliga. Produkterna är båda 2×2−matriser. Men är de lika? Vi får att

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

och alltså inte lika. Därmed gäller alltså inte den kommutativa lagen.
Vi ger nu ett exempel (inte bevis) på den assocoiativa lagen. Med $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$, som ovan och $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ beräknar vi nu

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a - 2b \\ 5a - 4b \end{bmatrix}$$

och

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -a \\ 2a - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a - 2b \\ 5a - 4b \end{bmatrix}.$$

P.s.s. ger vi ett exempel på högerdistributiva lagen. Med samma matriser som ovan beräknar vi först

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b \\ 5a + 3b \end{bmatrix}$$

och sedan

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} a + 2b \\ 3a + 4b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a \\ 2a - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b \\ 5a + 3b \end{bmatrix}$$

med samma resultat.

■

2.3 Enhetsmatris

Definition 2.3 En matris $\boldsymbol{I} \equiv \boldsymbol{E}$ sådan att

$$\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}$$

kallas enhetsmatris (identitity matrix).

Kommentarer

- En enhetsmatris $\boldsymbol{I}$ är kvadratisk och enhetsmatrisen avordning n betecknas, om så behövs, $\boldsymbol{I}_n$. Dessa fungerar som talet 1, som kan ses som enhetsmatrisen $I_1 = [1]$. $1 \cdot 54 = 54 \cdot 1 = 54$. Närmare bestämt är dessa mstriser av ordning 1 t.o.m. 3

$$\boldsymbol{I}_1 = [1], \quad \boldsymbol{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ respektive } \boldsymbol{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (2.4)$$

EXEMPEL 2.3 För att multiplicera matrisen med $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ med en enhetsmatris, ser vi att för produkten $\boldsymbol{I}_n \cdot \boldsymbol{B}$ måste $n = 3$ antalet rader i $\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = ... = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}\,.$$

För produkten $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{I}$ måste $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_2$, d.v.s. vara av ordning 2.

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = ... = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}$$

■

2.4 Transponatmatris

EXEMPEL 2.4 Genom att i $\boldsymbol{B}$ ovan byta plats på rad och kolonn får vi transponatet $\boldsymbol{B}^T$ till $\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \text{ och ytterligare en transponering } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}\,.$$

■

EXEMPEL 2.5 I exempel 1.8 har vi ES

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2y + 3z = 2 \end{cases}.$$

Detta är på matrisform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

med $\boldsymbol{A}$ som koefficientmatris och $\boldsymbol{B}$ som HL. Detta ES kan som, matrisekvation alternativt skrivas (Verifiera!)

$$[x\,y\,z] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = [1\,2]. \tag{2.5}$$

Med $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ är matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^T$. M.h.a. transponat kan nu (2.5) skrivas

$$\boldsymbol{X}^T \cdot \boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{B}^T.$$

■

Definition 2.4 Givet matrisen $\boldsymbol{A} = (a_{j,k})_{m\times n}$. Transponatmatrisen är matrisen $\boldsymbol{A}^T = (a_{k,j})_{n\times m}$

EXEMPEL 2.6 Ex.vis med $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix}$ är $\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} \end{bmatrix}$.

■

Vi ser från exempel 2.4

$$(\boldsymbol{B}^T)^T = \boldsymbol{B} \tag{2.6}$$

d.v.s. två transponeringar tar ut varandra. Vi ser inser att

- $\operatorname{typ}\boldsymbol{B} = m \times n \Longrightarrow \operatorname{typ}\boldsymbol{B}^T = n \times m$.
- $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$.
- Vi bevisar att

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{A}^T \tag{2.7}$$

Bevis: Både VL:s och HL:s produkter existerar precis då $\boldsymbol{A}$ har lika många kolonner som $\boldsymbol{B}$ har rader. Elementet på plats (k,i) i $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^T$ är på plats (i,k) i $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$. Detta element är produkten av rad i i $\boldsymbol{A}$ och kolonn k i $\boldsymbol{B}$. Nu är kolonn k i $\boldsymbol{B}$ rad k i $\boldsymbol{B}^T$ och rad i i $\boldsymbol{A}$ är kolonn i i $\boldsymbol{A}^T$. Detta är också elementet på plats (k,i) i $\boldsymbol{B}^T\cdot\boldsymbol{A}^T$ och beviset är klart.

■

- Ett ES på matrisform som $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ kan således ekvivalent skrivas

$$\boldsymbol{X}^T \cdot \boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{B}^T \,,$$

d.v.s. den obekanta matrisen står nu till vänster om koefficientmatrisen.

- En matris sådan att $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$ kallas symmetrisk. En sådan matris är med nödvändighet kvadratisk. Produkten mellan en matris $\boldsymbol{A}^T$ och $\boldsymbol{A}$ är symmetrisk. En enhetsmatris är symmetrisk.

- Produkten mellan transponatmatris och matrisen själv ger en kvadratisk matris. Ex.vis med $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, är $\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Vi ser att typ $\boldsymbol{A} = 3 \times 2$ och typ $\boldsymbol{A}^T = 2 \times 3$. Produkten $\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A}$ existerar då och är av typ 2×2.

$$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 17 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

- Vi bevisar nu (allmänt) att $\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A}$ existerar och är symmetrisk.

Bevis: sätt typ $\boldsymbol{A} = m \times n$. Då är typ $\boldsymbol{A}^T = n \times m$. Därmed existerar produkten $\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} =: \boldsymbol{C}$ och är av typ $n \times n$. Vi skall visa att $\boldsymbol{C}^T = \boldsymbol{C}$.

$$\boldsymbol{C}^T = (\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A})^T = \boldsymbol{A}^T \cdot (\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}$$

eftersom $(\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A}$ enligt (2.6).

∎

2.5 Invers matris

För ett reellt (komplext) tal $x \neq 0$ finns det inverterade värdet $\frac{1}{x}$, ex.vis är det inverterade värdet till $-\frac{5}{3}$ talet $\frac{1}{-\frac{5}{3}} = -\frac{3}{5}$. För vissa kvadratiska matriser $\boldsymbol{A}$ finns en matris $\boldsymbol{A}^{-1}$ med egenskapen

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I} \,,$$

d.v.s. $\boldsymbol{A}^{-1}$ är högerinvers. För denna matris gäller även att den är vänsterinvers

$$\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \,.$$

För kvadratisk matris avordning 2

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ är } \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} . \tag{2.8}$$

om $ad - bc \neq 0$. Talet $ad - bc$ är ett "konditionstal" av matrisen $\boldsymbol{A}$ i (2.8). Detta tal kallas *determinanten av* $\boldsymbol{A}$. Vi formular nu följade sats med bevis.

Sats 2.1 Antag att $\boldsymbol{A}$ har båda vänster och höger inversmatris $\boldsymbol{A}_L^{-1}$ respektive $\boldsymbol{A}_R^{-1}$. Då är dessa lika.

Bevis:

$$\boldsymbol{A}_L^{-1} = \boldsymbol{A}_L^{-1} \cdot \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}_L^{-1} \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}_R^{-1}) = (\boldsymbol{A}_L^{-1} \cdot \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{A}_R^{-1} = \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{A}_R^{-1} = \boldsymbol{A}_R^{-1}\,.$$

∎

2.5.1 Matrisekvationer

Ekvationen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ med matrisen $\boldsymbol{X}$ som obekant metris, kallas *matrisekvation* introducerad i (3.13) sidan 49. Vi skall formellt lösa några sådana ekvationer.

Exempel 2.7 Vi skall lösa ES i exempel i 1.1. Detta ES är

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \quad \text{eller som matrisekvation} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

som vi skriver $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ med koefficientmatris

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \text{ och } \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ samt HL } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Hur kan inversmatrisen till $\boldsymbol{A}$, om den existerar, användas för att lösa detta ES? Vi multiplicerar matrisekvationen ovan med $\boldsymbol{A}^{-1}$ *från vänster.* Vi multiplicerar först VL $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X}$,.

$$\boldsymbol{A}^{-1} \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X}) = \{\text{associativa lagen}\} = (\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}\,.$$

Motsvarande multiplikation i HL ger $\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B}$, alltså

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B}\,.$$

Nu är det $\det \boldsymbol{A} = 2 \cdot (-2) - (-1) \cdot 1 = -3 \neq 0$. Alltså existerar $\boldsymbol{A}^{-1}$ och är

$$-\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Därmed är

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

d.v.s. $x = 0$ och $y = -1$.

∎

Exempel 2.8 Lös matrisekvationen

$$\boldsymbol{X} : \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}$$

där $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Lösning

Vi flyttar matrisen $2\boldsymbol{X}$ till VL och får i VL $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}-2\boldsymbol{X}$. Här vill vi bryta ut /faktorisera med högerdistr. lagen. Det skulle ge $(\boldsymbol{A}-2)\cdot\boldsymbol{X}$ men talet 2 måste vara en matris. Enda möjligheten är att skriva $2\cdot\boldsymbol{X}=2\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{X}$, alltså skriva om 2 som matrisen $2\boldsymbol{I}$. Detta ger (Obs! Vi måste här ha enhetsmatrisen *till vänster* om $\boldsymbol{X}$!)

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\,.$$

Vi multiplicerar med $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}$ från *vänster*, också viktigt. Detta ger

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}\cdot\boldsymbol{B}\,.$$

Med de matriserna ovan är

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}\text{ och därmed }(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}.$$

Alltså är

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\ 7\end{bmatrix}=...=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}.$$

■

EXEMPEL 2.9 Givet matrisekvationen $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$, där $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{X}$ har tre kolonner och $\boldsymbol{B}$ har två rader.

(a) Bestäm typerna för de tre matriserna.

(b) Lös ut $\boldsymbol{X}$ ur marisekvationen.

Lösning

(a) $\boldsymbol{X}$ har lika många kolonner som $\boldsymbol{A}$ har rader, alltså är $\operatorname{typ}\boldsymbol{A}=3\times3$. $\operatorname{typ}(\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{A})=m\times3$ och $\operatorname{typ}\boldsymbol{B}=2\times n$. P.g.a. likhet mellan dessa måste $m\times3=2\times n$, d.v.s. $m=2$ och $n=3$. Alltså är $\operatorname{typ}\boldsymbol{A}=3\times3$, $\operatorname{typ}\boldsymbol{X}=2\times3$ och $\operatorname{typ}\boldsymbol{B}=2\times3$.

(b) Vi multiplicerar med $\boldsymbol{A}^{-1}$ denna gång *från höger* i båda led.

$$\underbrace{\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{I}=\boldsymbol{X}}_{\text{VL}}=\underbrace{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}}_{\text{HL}}\,.$$

Alltså är $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}$.

■

2.5.2 Jacobis metod; Beräkning av invers matris

Vi ser i exemplen 1.6 och 1.7 att vi har kvadratiska koefficientmatriser och att när vi väl har fått radreducerad form, så är koefficientmatrisen en enhetsmatris och i totalmatrisens HL står i den högra kolonnen lösningen $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ respektive $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Vi använder detta för att bestämma inversmatris (Jacobis metod). För att invertera kvadratiska matriser $\boldsymbol{A}$ av högre ordning kan man se inversmatrisen som en okänd matris $\boldsymbol{X}$, som den matris som löser ekvationen

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}\,.$$

Det är då klart att $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$. På matrisform

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}] \sim ... \sim [\boldsymbol{I}|\boldsymbol{X}]$$

d.v.s. till höger om | står $\boldsymbol{X}$, som är $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Exempel 2.10 För att invertera koefficientmatrisen i exempel 1.4 ser vi först att den är

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vi skall alltså lösa ekvationen $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$ och vi gör det genom att lösa detta på matrisform.

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Vi skall använda elminationsmetoden tills dess att vi får

$$[\boldsymbol{I}|\boldsymbol{X}]\,.$$

Detta $\boldsymbol{X}$ är alltså lika med $\boldsymbol{A}^{-1}$.

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim ... \sim [\boldsymbol{I}|\boldsymbol{X}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{array}\right].$$

Alltså är $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

Vi verifierar att

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} = ... = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}_3\,.$$

p.s.s. är $\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_3$.

■

Kommentarer För invers matris gäller bl.a. följande

$*)$ $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}$, om inverserna till $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$ existerar.

$**)$ $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\Longleftrightarrow\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{B}$, om $\boldsymbol{A}^{-1}$ existerar.

$***)$ $(\boldsymbol{A}^T)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^T$

Vi bevisar $*)$ och $***)$.

Bevis:

$$*)\,(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}^{-1})=\{\text{Assoc. lagen}\}=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}^{-1})\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}\,.$$

P.s.s. visar man att $\boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}$ är högerinvers.
För att bevisa $***)$ multiplicerar vi med $\boldsymbol{A}^T$ först från höger.

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^T\cdot\boldsymbol{A}^T=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1})^T=\boldsymbol{I}^T=\boldsymbol{I}\,.$$

▪

2.5.3 Invers matris med komplementmetoden

På sidan 27 ges inversmatrisen till en matris av ordning 2. Metoden att betämma den kallas *komplementmetoden*.

Exempel 2.11 Vi tar nu fram inversen till

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&1&-2\\1&0&-1\end{bmatrix},$$

se exempel 2.10. Först tar vi fram en matris $\boldsymbol{B}$ av ordning 3 genom at beräkna 9 underdeteminanter till $\boldsymbol{A}$. Elementet på (j,k) fås genom att stryka rad k och kolonn j och därefter ta determinanten på den återstående matrisen. Sedan multipliceras denna underdeterminant med -1^{j+k}. Ex.vis är $b_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-1&2\\0&-1\end{vmatrix}=-1$. Till slut får vi att

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1&-1&0\\0&-3&6\\-1&-1&3\end{bmatrix}$$

men detta är inte $\boldsymbol{A}^{-1}$. En kontroll ger att

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{bmatrix}.$$

Vi måste alltså dividera $\boldsymbol{B}$ med -3 för att få $\boldsymbol{A}^{-1}$:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Talet -3 som dyker upp som huvuddiagonalens element är $\det \boldsymbol{A}$.

■

2.6 Minsta kvadratmetoden

För överbestämda ES brukar det inte finnas lösning.

Exempel 2.12 ES $\begin{cases} y = -2 \\ x = 2 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$ saknar lösning. ES är dessutom överbestämt. Som matrisekvation skriver vi det som

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ eller kortare } \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}\,.$$

Man kan visa att det *felutjämnade ES* som erhålls genom att multiplicera med $\boldsymbol{A}^T$ *från vänster*

$$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{B}$$

alltid har lösning. I detta fall får vi

$$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 17 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Matrisen $\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A}$ är kvadratisk med determinant $18 \neq 0$ och alltså inverterbar. Vi får

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{B} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 17 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3/2 \end{bmatrix}.$$

Svar: $\begin{cases} x = 0 \\ \\ y = -3/2 \end{cases}$.

■

Exempel 2.13 Man kan ange ”felet” av lösningen till det felutjämnade ES som i föregående exempel. Vi sätter in denna lösning i uttrycket

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \neq \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi får som förväntat ingen likhet mellan $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}$ och $\boldsymbol{B}$. I stället anger man *medelfelet* för lösningen. Den definieras

$$\eta := \frac{|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}-\boldsymbol{B}|}{\sqrt{m}} \tag{2.9}$$

där m är antal rader i $\boldsymbol{A}$. I detta exempel är $m = 3$ och vi räknar ut att $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}-\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Med $|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}-\boldsymbol{B}|$ menas avståndet mellan origo och punkten $(1/2, -2, 1/2)$ (eller längden av orstvektorn $(1/2, -2, 1/2)$. Detta ges av

$$\sqrt{(1/2)^2 + (-2)^2 + (1/2)^2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Medelfelet är alltså

$$\eta = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

■

2.6.1 Invers matris till icke-kvadratisk matris

Till vissa matriser $\boldsymbol{A}$ av typ $m \times n$ finns vänsterinvers. Ett nödvändigt villkor är att $m > n$. I det fallet finns ingen högerinvers.

Exempel 2.14 Givet matriserna

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har att

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}_2 \text{ men } \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & -12 & 4 \end{bmatrix} \neq \boldsymbol{I}_3.$$

Vi säger att $\boldsymbol{B} =: \boldsymbol{A}_L^{-1}$ är vänsterinvers till $\boldsymbol{A}$. Med $\boldsymbol{A}$, som ovan och ett HL som är $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ tecknar vi nu matrisekvationen

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\,,$$

som vi försöker lösa m.h.a. vänsterinversen genom att multiplicera med $\boldsymbol{A}_L^{-1}$ från vänster. Detta ger

$$\underbrace{\boldsymbol{A}_L^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}}_{\text{VL}} = \underbrace{\boldsymbol{A}_L^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \end{bmatrix}}_{\text{HL}}$$

d.v.s. lösningen är $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \end{bmatrix}$. Är den en riktig lösning? Insättning i den ursprungliga ekvationen ger

$$\boldsymbol{A} \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \\ -26 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och alltså falsk. Detta beror på att vi enbart har implikationen "$\Longrightarrow$" och inte "$\Longleftarrow$", något som bara säger, att *om ES har lösning*, så är den $\begin{bmatrix} -7 \\ -2 \end{bmatrix}$. Med samma matrisekvation men med HL $= \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \\ -26 \end{bmatrix}$ är ju lösningen riktig. Vi kan uttrycka det så att *om* den ursprungliga ekvationen *har* lösning, så erhålls den genom att multiplicera med $\boldsymbol{A}_L^{-1}$ från vänster.

■

Kapitel 3

Determinant

3.1 Beräkning av determinant

Vi har beräknat determinanten av en kvadratisk matris av ordning 2, se sidan 27. Det går att definiera determinanten för matriser av högre ordning på lite olika sätt. För en kvadratisk matris $\boldsymbol{A}$ tecknar vi dess determinant som

$$\det \boldsymbol{A} = \{ \text{ men även } \} = |\boldsymbol{A}|\,.$$

Vi nöjer oss här med determinant av matris av ordning 3. Alltså givet en matris

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}.$$

Determinanten, ett tal, erhålls genom ”utveckling” längs godtycklig rad eller kolonn och får en summa innehållande underdterminanter av ordning 2. Ex,vis utveckling längs rad 2 ger

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}| &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}a_{21}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \\ &= (-1)^{2+2}a_{22}\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}a_{23}\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} = \\ &= -a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{1,3}a_{3,2} + a_{2,2}a_{1,1}a_{3,3} - a_{2,2}a_{1,3}a_{3,1} - a_{2,3}a_{1,1}a_{3,2} + a_{2,3}a_{1,2}a_{3,1}\,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

3.1.1 Determinant av matris av ordning 3; Sarrus regel

För determinant av matris (endast)av ordning 3 finns Sarrus regel att tillgå. De två första kolonnerna skrivs upp en gång till och då till höger. Pilar $\searrow$ ger upphov till produkt som förses med tecknet + och pilar $\swarrow$ ger upphov till produkt som förses med tecknet $-$.

$$
\begin{aligned}
\det \boldsymbol{A} &= \left|\begin{array}{ccccc|cccc}
a_{1,1} & & a_{1,2} & & a_{1,3} & & a_{1,1} & & a_{1,2} \\
 & \searrow & & \rlap{$\searrow$}\swarrow & & \rlap{$\searrow$}\swarrow & & \swarrow & \\
a_{2,1} & & a_{2,2} & & a_{2,3} & & a_{2,1} & & a_{2,2} \\
 & \swarrow & & \rlap{$\searrow$}\swarrow & & \rlap{$\searrow$}\swarrow & & \searrow & \\
a_{3,1} & & a_{3,2} & & a_{3,3} & & a_{3,1} & & a_{3,2}
\end{array}\right| = \\
&= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} + \\
&\quad -a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}\,.
\end{aligned}
$$

Vi ser att detta ger samma termer som i (3.1).

Exempel 3.1

$$
\det \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right| =
$$

$$
= 3 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 5 +
$$

$$
-1 \cdot (-1) \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \cdot 1 = -3\,.
$$

■

3.1.2 Några räkneregler för determinant av produkt av matriser

Vi har följande sats för determinant av produkt av matriser

Sats 3.1

$$\det(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \det\boldsymbol{A}\cdot\det\boldsymbol{B}\,. \tag{3.2}$$
$$\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = (\det\boldsymbol{A})^{-1}\,. \tag{3.3}$$
$$\det(\boldsymbol{A}^{T}) = \det\boldsymbol{A}\,. \tag{3.4}$$
$$\det(c\cdot\boldsymbol{A}) = c^{n}\det\boldsymbol{A}\,,\ \text{om typ}\,\boldsymbol{A} = n\times n\,. \tag{3.5}$$

Determinanten av en kvadratisk matris

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & ... & d_{1n} \\ 0 & d_{22} & ... & d_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & ... & d_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

med nollor under huvuddiagonalen är

$$|\boldsymbol{D}| = d_{11}\cdot d_{22}\cdot ....\cdot d_{nn}\,. \tag{3.7}$$

EXEMPEL 3.2 Givet

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ och därmed } \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Då är

$$|\boldsymbol{A}| = 2, \quad |\boldsymbol{B}| = -4 \text{ och } |\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}| = -8\,.$$

■

Vidare demonstrerar vi (3.7) först för en matris av ordning 2 och sedan ordning 3.

$$\det\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ 0 & d_{22} \end{vmatrix} = d_{11}\cdot d_{22} - d_{12}\cdot 0 = d_{11}\cdot d_{22}\,.$$

Från determinanten ovan får vi

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{D}| &= \begin{vmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} \\ 0 & d_{2,2} & d_{2,3} \\ 0 & 0 & d_{3,3} \end{vmatrix} = \{\text{Utveckling längs rad 3}\} = \\ &= (-1)^{3+3}\cdot d_{33}\cdot\begin{vmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} \\ 0 & d_{2,2} \end{vmatrix} = d_{33}\cdot d_{11}\cdot d_{22}\,. \end{aligned}$$

Vi bevisar (3.2) för $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ 0 & b_{2,2} & b_{2,3} \\ 0 & 0 & b_{3,3} \end{bmatrix}$. Deras determinanter är enligt (3.6) och (3.7)

$$|\boldsymbol{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} \text{ och } |\boldsymbol{B}| = b_{11}b_{22}b_{33}\,.$$

Nu är (visa)

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & & \\ 0 & a_{2,2}b_{2,2} & \\ 0 & 0 & a_{3,3}b_{3,3} \end{bmatrix}$$

där elementen ovanför huvuddiagonalen när utelämnade. Denna matris har determinanten

$$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}b_{1,1}b_{2,2}b_{3,3} = |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|\,.$$

Då VL är $|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}|$ och HL är $|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$ har vi visat (3.2) i detta specialfall.

3.2 Determinant och radoperationer

Vi skall se hur de tre radoperationerna (sidan 11) påverkar en kvadratisk matris' determinant.

Sats 3.2

R1 Multiplikation av en rad med ett tal och därefter adderas (elementvis) till en annan rad ändrar inte determinantens värde.

R2 Platsbyte av rad ändrar tecknet på determinanten.

R3 Multiplikation av en rad med ett tal $c \neq 0$ ändrar determinantens värde med samma konstant.

Kommentarer

- Det betyder att om vi håller reda på radoperationerna för att få matrisen på trappstegsform (echelon form) kan vi beräkna determinantens värde med bara en term.

- För en kvadratisk matris $\boldsymbol{A}$ som är radekvivalent med $\boldsymbol{A}'$, d.v.s. $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}'$ gäller alltså att om $|\pm A| \neq 0$, så är $|\boldsymbol{A}'| \neq 0$. Eftersom även $\boldsymbol{A}' \sim \boldsymbol{A}$ gäller

$$|\boldsymbol{A}| \neq 0 \Longleftrightarrow |\boldsymbol{A}'| \neq 0 \text{ och således } |\boldsymbol{A}| = 0 \Longleftrightarrow |\boldsymbol{A}'| = 0 \tag{3.8}$$

  Speciellt gäller (3.8) för $\boldsymbol{A}'$ på trappstegsform.

Exempel 3.3 I exempel 1.7 beräknar vi determinanten av koefficientmatrisen.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) & \cdot(-1) \\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow \end{matrix} \{\text{R1.}\} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \{\text{R3. och R1.}\} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{matrix} (-1) \\ \hookleftarrow \end{matrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -3$$

där vi använt oss av (3.7).

■

Kommentarer

- Med $\det \boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|$ av matrisen i (1), sidan 10 måste $m = n$. Ett sätt att definiera determinant för en matris av ordning n använder sig av begreppet *inversion* (inv). En determinant där $m = 3$ består av termerna i (3.1), sidan 35. En sådan term är $a_{12}a_{23}a_{31}$, sånär som på tecken. Hur bestämmer man tecknet? Ordningen på kolonnindexen är avgörande. Dessa är $2, 3, 1$. Hur många ”byten” behövs för att få ordningen $1, 2, 3$? Vi byter

  $$2, 3, 1 \sim 2, 1, 3 \sim 1, 2, 3$$

  alltså två byten, Detta talet $2 = \operatorname{inv}(2, 3, 1)$. Alltså är termen

  $$(-1)^{\operatorname{inv}(2,3,1)} a_{12}a_{23}a_{31} = (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} = a_{12}a_{23}a_{31}\,.$$

  Man kan också göra bytena

  $$2, 3, 1 \sim 1, 3, 2 \sim 1, 2, 3$$

  också två byten. Även om man byter på ett annat sätt är antal byten, i detta fall, ett jämnt tal.

Exempel 3.4 Beräkna determinanten av

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning

Vi använder eliminationsmetodens tre radoperationer för att få så många nollor som möjligt, helst nollor under hvuvuddiagonalen.

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \{\text{R1.}\} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \\
&= \{\text{R2. och R3. d.v.s. byte av rad 2 och 3 samt teckenbyte av rad 3}\} = \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & -10 & 5 \end{vmatrix} = \{\text{R3.}\} = \\
&= 6 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \{\text{R1.}\} = 30 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}
$$

eftersom en nollrad ger att determinantens värde är $= 0$.

■

3.3 Samband mellan determinant och lösning av ES

Exempel 3.5 I exempel 1.4 har vi koefficientmatrisen

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}
$$

med determinant (Utveckling längs rad 3, obsevera att andra termen är 0)

$$
(-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + (-1) \cdot (1+2) = -3 \,.
$$

Att determinanten $\neq 0$ hänger ihop med att invers existerar och att ES har en entydig lösning.

I exempel 1.5 har vi koefficientmatrisen

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

som vi lämpligt beräknar genom att utveckla längs rad 3. Det blir två termer som är noll och

$$(-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 = 0\,.$$

Att determinanten är $= 0$ betyder att ES i samma exempel inte har entydig lösning.

Med HL $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ finns ∞ med lösningar.

Med HL , $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ i samma exempel, är antalet lösningar 0.

■

Sats 3.3 Antag att $\boldsymbol{A}$ är en kvadratisk matris av ordning n. Då är följande fyra påståenden ekvivalenta.

I $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = n$.

II Matrisekvationen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ har entydig lösning.

III $\boldsymbol{A}$ har invers matris.

IV $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

Bevis: Vi sätter $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}'$ där $\boldsymbol{A}'$ är på trappstegsform:

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} a'_{1,1} & a'_{1,2} & \dots & a'_{1,n} \\ 0 & a'_{2,2} & \dots & a'_{2,n} \\ 0 & 0 & \dots & a'_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{n,n} \end{bmatrix}.$$

I⇒II Antag att $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = n$ och skriv ES på matrisform $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}]$. Då är motsvarande radekvivalenta radreducerade matris enhetsmatrisen $\boldsymbol{I}_n$ och lösningen på ES står i HL.

II⇒III Betrakta matrisekvationen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}_n$. Den har lösningen $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

III⇒IV Existensen av invers ger att $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$. Regeln för determinant av prdodukt av kvadratiska matriser ger

$$\det(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}) = \det \boldsymbol{I} \text{ d.v.s. } \det \boldsymbol{A} \cdot \det(\boldsymbol{A}^{-1}) = 1\,.$$

Alltså måste $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ (Speciellt följer det att $\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det \boldsymbol{A}}$).

IV⇒I Vi skall visa IV $\Longrightarrow$ I och visar det ekvivalenta påståendet $\neg$IV $\Longleftarrow$ $\neg$I. Om alltså $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} \neq n$, så är $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} < n$. Då innehåller $\boldsymbol{A}'$ en nollrad och därmed är $\det \boldsymbol{A} = 0$ (Alternativt, kan man argumentera, att radoperationerna inte ändrar på förhållandet att determinanten $= 0$ eller $\neq 0$).

∎

3.4 Bevis av sats 3.2

Vi behöver först en definition av determinant.

Definition 3.1 Determinanten av $\boldsymbol{A}$ är summan

$$\det \boldsymbol{A} = \sum (-1)^{\text{inv}\,(k_1,k_2,\dots,k_n)} \cdot a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \dots \cdot a_{nk_n} \qquad (3.9)$$

där summan är tagen över alla permutationer $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ av $(1, 2, .., n)$.

Exempel 3.6 Antag att $n = 3$ i (3.9). Antalet *permutationer* av $1, 2, 3$ är $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ och därmed 6 termer i summan (3.9). Antal termer i en determinant av en matris av ordning n är $n!$. Ex.vis är $4! = 24$ och $10! = 3\,628\,800$. Ett sätt att få ned antal termer $\neq 0$ är m.h.a. radelimination att skapa så många element $= 0$ som möjligt.
Från definitionen ovan följer direkt resultatet nedan.

Varje term i determinanten innehåller en faktor ur varje rad och kolonn.

För en matris med en nollrad eller nollkolonn är därför determinanten $= 0$.

■

3.4.1 Inverkan av radoperationerna 3, 2 och 1

Radoperation 3 (R3). Multiplikation av en rad med ett tal c ändrar determinantens värde med samma faktor c.

Genom att multiplicera en rad j i $\boldsymbol{A}$ med ett tal c ersätts a_{jk}, $k = 1, 2, \dots, n$ med $c\,a_{jk}$ i $\boldsymbol{A}$ och i $\det \boldsymbol{A}$. För determinanten får vi termer

$$\sum (-1)^{\text{inv}\,(k_1,k_2,\dots,k_n)} \cdot a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \dots \cdot (c \cdot a_{jk}) \cdot \dots \cdot a_{nk_n} =$$

$$= c \cdot \sum (-1)^{\text{inv}\,(k_1,k_2,\dots,k_n)} \cdot a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \dots \cdot a_{jk} \cdot \dots \cdot a_{nk_n} = c \cdot \det \boldsymbol{A}\,.$$

Radoperation 2 (R2). Vid radbyte i en kvadratisk matris ändras determinantens tecken.

Bevis: En godtycklig term i $\det \boldsymbol{A}$ är

$$(-1)^{\text{inv}\,(k_1,k_2,\dots,k_i,\dots,k_j,\dots,k_n)} \cdot a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \dots \cdot a_{ik_i} \cdot \dots \cdot a_{jk_j} \cdot \dots \cdot a_{nk_n}$$

Antag att $i < j$ och motsvarande rader byter plats och ger upphov till matrisen $\boldsymbol{A}'$. Motsvarande term i $\det \boldsymbol{A}'$ är

$$(-1)^{\text{inv}\,(k_1,k_2,...,k_j,...,k_i,...,k_n)} \cdot a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot ... \cdot a_{jk_j} \cdot ... \cdot a_{ik_i} \cdot ... \cdot a_{nk_n}$$

Det enda som skiljer dess termer åt, är antal inversioner inv (...). Ändring mellan

$$(k_1, k_2, ..., k_i, ..., k_j, ..., k_n) \text{ och } (k_1, k_2, ..., k_j, ..., k_i, ..., k_n)$$

behövs *ett* byte. Alltså har

$$(-1)^{\text{inv}\,(k_1,k_2,...,k_i,...,k_j,...,k_n)} \text{ och } (-1)^{\text{inv}\,(k_1,k_2,...,k_j,...,k_i,...,k_n)}$$

olika tecken. Därmed ändras endast tecknet på motsvarande termer eftersom tecknet ges av inv (...) så att determinantens värde ändrar tecken.

∎

Vi passar på att ge ett korollarium, som fungerar som lemma till nästa påstående.

Korollarium 3.1

1. En kvadratisk matris med två identiska rader har determinanten = 0.

2. En kvadratisk matris med en nollrad (eller en nollkolonn) har determinanten = 0.

Bevis:

1. Låt rad i och rad j var två olika rader som är identiska. Låt vidare $\boldsymbol{A}'$ vara den matris som erhållsdå de två raderna är bytta. Då gäller dels att $\det \boldsymbol{A}' = -\det \boldsymbol{A}$ och eftersom $\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{A}'$ får vi likheten $\det \boldsymbol{A} = -\det \boldsymbol{A}$ eller ekvivalent $\det \boldsymbol{A} = 0$.

2. Varje term i determinanten i (3.9) sidan 43 innehåller en term ur varje rad (kolonn) och alltså ur nollraden (nollkolonnen). Således är determinaten = 0.

∎

Vi formulerar nu och bevisar

Radoperation1 (**R1**). Multiplikation av en rad med ett tal c som sedan adderas till en annan rad ändrar inte determinantens värde.

Bevis: Vi sätter

$$\boldsymbol{X} = [x_1\, x_2 \ldots x_n]$$

och byter elementen i rad j i $\boldsymbol{A}$ från a_{jk} till x_j och definierar

$$T[\boldsymbol{x}] := \sum (-1)^{\mathrm{inv}\,(k_1,k_2,\ldots k_n)} a_{1\,k_1} \cdot a_{2\,k_2} \cdot \ldots \cdot a_{j-1,\,k_{j-1}} \cdot x_j \cdot a_{j+1,k_{j+1}} \cdot \ldots \cdot a_{n,k_n}\,. \tag{3.10}$$

Vi låter $\boldsymbol{a}_j$ vara rad j i $\boldsymbol{A}$. Speciellt är då $T[\boldsymbol{a}_j] = \det \boldsymbol{A}$ enligt definitionen (3.9). Vi får vidare att

$$\begin{aligned} T[\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}] &= \sum (-1)^{\mathrm{inv}\,(k_1,k_2,\ldots k_n)} a_{1\,k_1} \cdot a_{2\,k_2} \cdot \ldots \cdot a_{j-1,\,k_{j-1}} \cdot (x_j + y_j) \cdot a_{j+1,k_{j+1}} \cdot \ldots \cdot a_{n,k_n} \\ &= \{\text{och använder distributiva lagen och får likheten}\} = \\ &= T[\boldsymbol{x}] + T[\boldsymbol{y}] \end{aligned}$$

d.v.s.

$$T[\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}] = T[\boldsymbol{x}] + T[\boldsymbol{y}]\,. \tag{3.11}$$

Vi ersätter nu $\boldsymbol{x}$ med $c\boldsymbol{x}$, där c är ett reellt tal. Vi får då

$$T[c\boldsymbol{x}] = c\,T[\boldsymbol{x}]\,. \tag{3.12}$$

Vid radoperation 1. multiplicerar vi en rad i med en konstant c och adderar sedan resultatet till rad j. Vi antar att $i < j$. Fallet $i > j$ behandlas p.s.s. Vi får en matris $\boldsymbol{A}'$, där som endast får rad j ändrat till

$$[a_{j1} + c\,a_{i1} \quad a_{j2} + c\,a_{i2} \quad \ldots \quad a_{jk} + c\,a_{ik} \quad \ldots \quad a_{jn} + c\,a_{in}]\ .$$

Determinanten är

$$\det \boldsymbol{A}' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ik} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} + c\,a_{i1} & a_{j2} + c\,a_{i2} & \ldots & a_{jk} + c\,a_{ik} & \ldots & a_{jn} + c\,a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Vi skriver den j :e raden som

$$[a_{j1}\, a_{j2} \ldots, a_{jn}] + c[a_{i1}\, a_{i2} \ldots a_{in}] = \boldsymbol{x} + c\,\boldsymbol{y}\,.$$

Determinanten $\det \boldsymbol{A}'$ kan vi uttrycka med operatorn T, som

$$\det \boldsymbol{A}' = T[\boldsymbol{x} + c\,\boldsymbol{y}] = T[\boldsymbol{x}] + c\,T[\boldsymbol{y}]\,.$$

Vi har att $T[\boldsymbol{x}] = \det \boldsymbol{A}$. Nu gäller det att visa att den andra termen $= 0$. I determinanten $T[\boldsymbol{y}]$ finns två lika rader nämligen rad i och j, som är $[a_{i1}\, a_{i2} \ldots a_{in}]$. Alltså är $T[\boldsymbol{y}] = 0$ och således är, enligt korrolarium 3.1

$$\det \boldsymbol{A}' = \det \boldsymbol{A}.$$

∎

Kommentarer

- Det är inte uppenbart att definitionen av determinant (3.9), att begreppet inversion är väldefinierat. Men man kan visa att $\operatorname{inv}(k_1, k_2, , ..., k_n)$ är antingen ett jämnt tal eller udda tal *oberoende hur* bytena görs, jämför med diskussionen på sidan 39.

- Man kan visa att $\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{A}^T$. I fallet $n = 2$ och

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ är } \det \boldsymbol{A} = ad - bc \text{ och } \det \boldsymbol{A}^T = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

  och alltså lika.

3.5 Cramers regel

För att lösa ut *en* variabel i ett ES kan man använda *Cramers regel.* Vi börjar dock med ett mer allmänt exempel, med koefficientmatris av typ 2×2.
I matrisekvationen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ med

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ och } \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

vill man beräkna enbart x. För att göra detta beräknar vi först $\boldsymbol{X}$ och antar att $\boldsymbol{A}^{-1}$ existerar.

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ -a_{21}b_1 + a11b_2 \end{bmatrix}$$

Vi uppfattar täljarens element som determinanter. Med

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}$$

blir täljaren på plats $(1,1)$ $|\boldsymbol{A}_1|$ och på plats $(2,1)$ $|\boldsymbol{A}_2|$. Observera att $\boldsymbol{A}_1$ är samma matris som $\boldsymbol{A}$ förutom att kolonn 1 är utbytt mot HL. P.s.s. är $\boldsymbol{A}_2$ matrisen $\boldsymbol{A}$ med kolonn 2 utbytt mot HL.

Exempel 3.7 Med I_1 och I_2 som variablerna och motstånden och strömmen I kända, får vi nedanstående ES

$$\begin{cases} I_1 + I_2 & = I \\ R_1 I_1 & = R_2 I_2 \end{cases}$$

Antag att vi bara vill beräkna I_2. Vi börjar dock att beräkna $\boldsymbol{X} := \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$. Som matrisekvation för vi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ R_1 & -R_2 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

som vi skriver formellt som

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}\,.$$

Vi utgår från att $\boldsymbol{A}$ har invers och determinant $\neq 0$. Då är

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B}.$$

Utskrivet är

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{R_1 + R_2} \begin{bmatrix} R_2 & 1 \\ R_1 & -1 \end{bmatrix}$$

så att

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B} = \frac{1}{R_1 + R_2} \begin{bmatrix} R_2 & 1 \\ R_1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{R_1 + R_2} \begin{bmatrix} R_2 I \\ R_1 I \end{bmatrix}.$$

Vi ser att $\det \boldsymbol{A}$ står i nämnaren sånär som på tecken. Vad står i täljaren? Vi inriktar oss på att först beräkna I_1. I täljaren står $R_2 I$. Byt ut kolonn 1 i $\boldsymbol{A}$ mot HL. Vi får då matrisen

$$\boldsymbol{A}_1 := \begin{bmatrix} I & 1 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix} \text{ med determinant } -I \cdot R_2\,.$$

Vi har alltså

$$I_1 = \frac{\det \boldsymbol{A}_1}{\det \boldsymbol{A}}\,.$$

P.s.s. är

$$I_2 = \frac{\det \boldsymbol{A}_2}{\det \boldsymbol{A}}\,,$$

där $\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & I \\ R_1 & 0 \end{bmatrix}$.

■

EXEMPEL 3.8 Vi beräkna nu I_2 i föregående exempel direkt med teorin i 1.

$$I_2 = \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{-R_1\, I}{-R_2 - R_1} = \frac{R_1\, I}{R_1 + R_2}\,.$$

■

Innan beviset behöver vi *kolonnoperationer* motsvarande radoperationer (sidan 11). Dessa är

Definition 3.2 De tre Kolonnoperationerna är

K1 Multiplikation av en kolonn med ett tal och därefter adderas (elementvis) till en annan rad.

K2 Platsbyte på två kolonner.

K3 Multiplikation av en kolonn med ett tal $\neq 0$.

Kommentarer Inverkan på determinantens värde är desamma som för motsvarande radoperationer:

K1 påverkar inte determinanten.

K2 ändrar tecknet på determinanten.

K3 ändrar determinantens värde med samma tal.

Sats 3.4 Cramers regel
Antag att matrisen $\boldsymbol{A}$ av ordning n har determinant $\det \boldsymbol{A} \neq 0$. Betrakta matrisekvationen

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \tag{3.13}$$

där $\operatorname{typ} \boldsymbol{B} = \operatorname{typ} \boldsymbol{X} = n \times 1$. Element x_k på plats k i $\boldsymbol{X}$ är lika med

$$x_k = \frac{\det \boldsymbol{A}_k}{\det \boldsymbol{A}} \equiv \frac{|\boldsymbol{A}_k|}{|\boldsymbol{A}|} \tag{3.14}$$

där $\boldsymbol{A}_k$ är den matris, som erhålls om kolonn k i $\boldsymbol{A}$ byts mot $\boldsymbol{B}$.

Bevis: Vi utgår här från att kolonnoperationer har samma inverkan på en matris som radoperationer. Vi antar att $k = 1$. Beviset för allmänt $k = 2, ..., n$ ges på liknande sätt. Vi börjar med att skriva om täljaren $|\boldsymbol{A}_k|$ i (3.14). Observera att (3.13) ger att $b_j = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n$ för $j = 1, 2, ..., n$. Vi byter därför b_j mot $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n$ och får likheten

$$|\boldsymbol{A}_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Multiplicera nu kolonn 2 med $-x_2$ och addera sedan till kolonn 1 (Radoperation 1 fast för kolonner). Då försvinner termerna $a_{j2}x_2$ i position $(j, 1)$ för $j = 1, 2, ..., n$. Multiplicera sedan kolonn 3 med $-x_3$ och addera sedan till kolonn 1. Då försvinner termerna $a_{j3}x_3$ i position $(j, 1)$ för alla $j = 1, 2, ..., n$.
Vi fortsätter att eliminera i kolonn 1 m.h.a. kolonn k, $k = 3, 4, ..., n$ tills vi får

$$|\boldsymbol{A}_1| = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \{\text{Bryt ut } x_1 \text{ ur kolonn } 1\} =$$

$$= x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = x_1 \, |\boldsymbol{A}| \text{ eller ekvivalent } x_1 = \frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|}$$

∎

EXEMPEL 3.9 Bestäm y i ES

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \\ -y + z = 2 \end{cases} .$$

Lösning

Som matrisekvation kan detta ES skrivas

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \text{ med } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

Matrisen $\boldsymbol{A}_2$ är $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Nu behöver vi determinanternas värde av dessa matriser. Med radoperation 1 mer exakt subtrahera första rad från andra rad, blir

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2 \cdot 1 - 4 \cdot (-1)) = 2 .$$

Med samma radoperation blir

$$|\boldsymbol{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \{\text{Gör ett radbyte mellan rad 2 och 3.}\} = -8 .$$

Alltså är $y = \dfrac{-8}{2} = -4$.

■