September 20, 2014

1 *Medianer i en triangel*

Exempel 1.1 Givet en triangel med hörn i A, B och C. En median är en sträcka mellan ett hörn och motståendes sidas mittpunkt. Vi skall visa att dessa skär varandra i en punkt T. Detta visar vi genom att visa att vi når T från hörnet A via de tre medianerna. Betrakta medianerna som vektorer med startpunkt på mitten av respektive sida och slutpunkt i motstående hörn. Beteckna medianen med slutbpunkt i A med $\boldsymbol{a}$ och p.s.s. för de två andra medianerna. Vi börjar med att uttrycka medianerna i vektorerna $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ och $\overrightarrow{BC}$. Vi ser att

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}, \text{ nollvektorn}$$

så att

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$$

så vi använder inte vektorn $\overrightarrow{BC}$ i de slutglitga uttrycken. Vi ser att

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB} \Longleftrightarrow \boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \text{ och p.s.s. } \boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,.$$

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}) \Longleftrightarrow \boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\,.$$

Vi uttrycker nu $\overrightarrow{AT}$ genom att gå längs de tre vektorerna $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$.

$$\begin{aligned}
\text{(1) längs } \boldsymbol{a}: \quad \overrightarrow{AT} &= x\,\boldsymbol{a}=-\frac{x}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) \\
\text{(2) längs } \boldsymbol{b}: \quad \overrightarrow{AT} &= \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}+y\,\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}+y\left(\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) \\
\text{(3) längs } \boldsymbol{c}: \quad \overrightarrow{AT} &= \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}+z\,\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}+z\left(\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)
\end{aligned}$$

Vi sätter nu dessa lika två och två.

$$\text{(1) och (2)}: \quad \overrightarrow{AT} = -\frac{x}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}+y\left(\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) \Longleftrightarrow$$

$$(-x/2-y)\overrightarrow{AB}=(x/2+1/2-y/2)\overrightarrow{AC} \quad (*)$$

$$\text{(2) och (3)}: \quad \overrightarrow{AT} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}+y\left(\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}+z\left(\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \Longleftrightarrow$$

$$(y-1/2+z/2)\overrightarrow{AB}=(-1/2+y/2+z)\overrightarrow{AC} \quad (**)$$

Eftersom $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ inte är (anti-)parallella, är deras koefficienter $= 0$. Detta ger fyra ekvationer och tre variabler, ett *överbestämt ES*.

$$\begin{cases} -x/2 - y = 0 \\ x/2 - y/2 + 1 = 0 \\ y + z/2 - 1 = 0 \\ y/2 + z - 1 = 0 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Det betyder att ES har lösningen $\begin{cases} x = -2/3 \\ y = 1/3 \\ z = 1/3 \end{cases}$. *Att* ES har (minst) en lösning, visar att de tre medianerna skär varandra i (minst) en punkt.

∎

Kommentarer

- Punkten T delar medianerna i förhållandet 1:2.
- Att ES är överbestämt (Fler ekvationer än variabler) och att problemet behandlar tre linjer/sträckor i planet, kan vi tolka som att
  "ett sådant ES har i allmänhet inga lösningar" respektive
  "tre linjer (i en triangel) skär i allmänhet inte varandra."
- Skärningspunkten T är triangelns (geometriska) tyngdpunkt.
- Man kan visa att triangelns (förlängda) höjder skär varandra i en punkt. Detsamma gäller triangelns bisektriser.