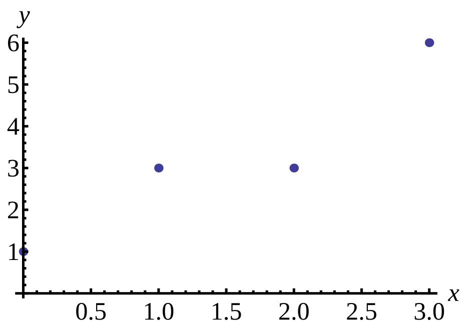
1 MK-metoden; exempel och övningar

Givet punkterna (x_k, y_k), $k = 1, 2, 3, 4$ med koordinater

$$\begin{cases} x_1 = 0 & y_1 = 1 \\ x_2 = 1 & y_2 = 3 \\ x_3 = 2 & y_3 = 3 \\ x_4 = 3 & y_4 = 6 \end{cases}$$

Vi skall anpassa en linje $y = kx + m$ ”så gott det går” mee MK-metoden. Detsom är okänt (variabler) och som söks, är k och m.



Vi får ett ES med 4 ekvationer och 2 obekanta, alltså ett *överbestämt* ES:

$$\begin{cases} 0 \cdot k + m &= 1 \\ 1 \cdot k + m &= 3 \\ 2k + m &= 3 \\ 3k + m &= 6 \end{cases}$$

Som matrisekvation:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix},$$

som vi skrive kortare $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}$.
Man löser detta ES på matrisform och finner att lösning saknas (0 lösningar). Istället löser man ES approximativt och använder matrisekvationen. Det innebär att man multiplicerar med $\boldsymbol{A}^T$ från vänster och får (med implikation $\Longrightarrow$)

$$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{Y}\,.$$

Man kan visa att denna matrisekvation alltid har lösning $\boldsymbol{X} = \overset{\wedge}{\boldsymbol{X}}$, som är den bästa lösningen i MK-mening. Vi återkommer till detta längre fram.
I VL:

$$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \text{ med determinant } = 4(7 \cdot 2 - 3^2) = 20 \neq 0.$$

Alltså existerar inversmatrisen och är

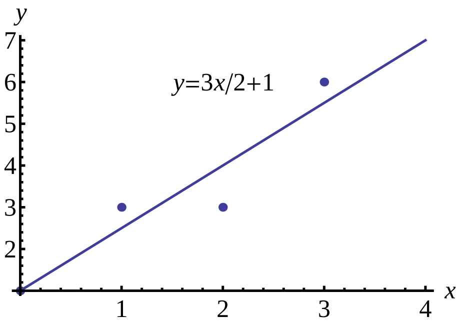
$$(A^T \cdot \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$\text{HL} = \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 27 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Lösningen är alltså

$$(\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{Y} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 27 \\ 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 27 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Linjens ekvation är alltså $y = \dfrac{3}{2}x + 1$.



Övningar

1.1 Lös följande ES med MK-metoden och ange medelfelet.

a) $\begin{cases} x + 2y & = & 3 \\ y - x & = & 1 \\ x - y & = & -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y & = & 3 \\ y - x & = & 1 \\ x - y & = & -2 \\ y & = & 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y & = & 5 \\ y - x & = & 1 \\ x - y & = & -1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y & = & 5 \\ y - x & = & 1 \\ x - y & = & -1 \\ 2y - x & = & 1 \end{cases}$

1.2 Anpassa med MK-metoden, en linje till punkterna

$$P_1 = (1; 2), \quad P_2 = (2; 3), \quad P_3 = (3; 5), \quad P_4 = (4; 8)$$

samt beräkna medelfelet.

1.3 Beräkna en parabel $y = ax^2 + bx + c$ till samma punkter, som i föegående övning. Vad är medelfelet?

Facit

1.1 Lös följande ES med MK-metoden och ange medelfelet.

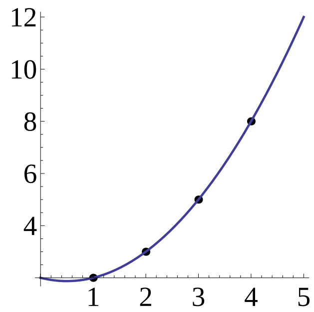
a) $(x, y) = \left(0, \dfrac{3}{2}\right), \ \eta = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ b) $(x, y) = (0, 2), \ \eta = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$

c) $(x, y) = (1, 2), \ \eta = 0$ d) $(x, y) = \left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{3}\right), \ \eta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

1.2 $k = 2$, $m = -1/2$, $\eta = 1/2$.

1.3

$$a = 1/2, \quad b = -1/2, \quad c = 2, \quad \eta = 0.$$


12
10
8
6
4
1
2
3
4
5