September 17, 2017

Cramers regel

Beräkning av enskilt element x_k i $\boldsymbol{X} = [x_1\, x_2\, ..., x_n]^T$.

1. Antag att $\boldsymbol{A}$ är en matris med typ $\boldsymbol{A} = n \times n$ och $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ och $\boldsymbol{B}$ en matris av typ $\boldsymbol{B} = n \times 1$.
2. Låt $\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{A}_k(\boldsymbol{B})$ vara matrisen $\boldsymbol{A}$ med kolonn k utbytt mot $\boldsymbol{B}$

Betrakta matrisekvationen

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}. \tag{1}$$

Då är element k, x_k i $\boldsymbol{X}$ lika med

$$x_k = \frac{|\boldsymbol{A}_k(\boldsymbol{B})|}{|\boldsymbol{A}|}. \tag{2}$$

Bevisskiss i fallet då $k = 1$.

$$|\boldsymbol{A}_1| = |\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{B})| = \begin{vmatrix} b_1| & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ b_2| & a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n| & a_{n,2} & ... & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n| & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,n}x_n| & a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,n}x_n| & a_{n,2} & ... & a_{n,n} \end{vmatrix} = \{\text{kolonnoperationer, K1}\} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}x_1| & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1}x_1| & a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}x_1| & a_{n,2} & ... & a_{n,n} \end{vmatrix} = \{\text{Bryt ut gemensam faktor } x_1\}$$

$$x_1 \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1}| & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1}| & a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}| & a_{n,2} & ... & a_{n,n} \end{vmatrix} = x_1 \cdot |\boldsymbol{A}|.$$