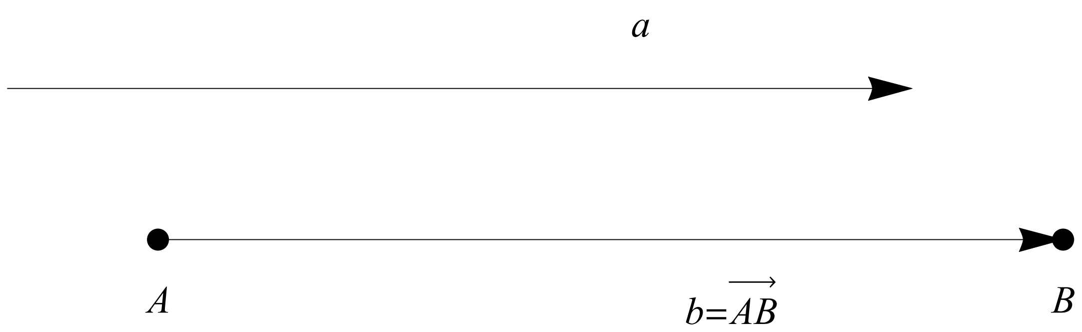
Linjär algebra

Vektoralgebra

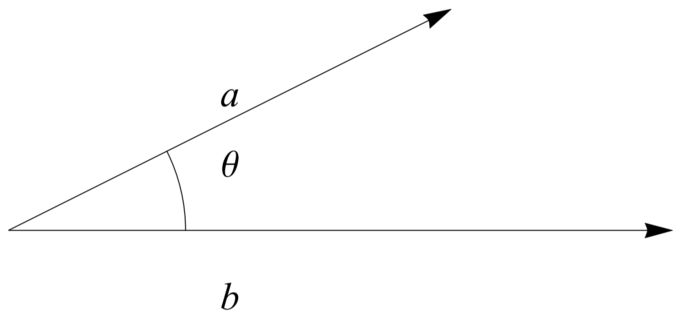
En vektor har längd och riktning och kännetecknas av dessa två egenskaper.
Detta gör det möjligt att parallellförflytta vektorn (och förbli samma vektor).



$$a = b = \overrightarrow{AB}$$

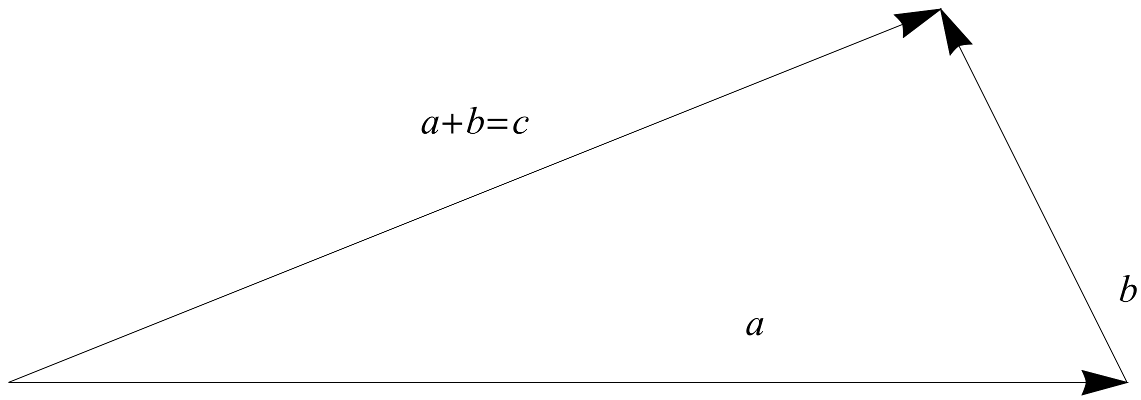
I figuren: **a=b** eftersom de är parallella och lika långa.
Dessutom är $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB}$ där A är startpunkt och B slut-punkt.

Längden av vektorn a skrivs $\|\boldsymbol{a}\| \geq 0$ med likhet precis då $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, nollvektorn (kan ritas som en punkt).

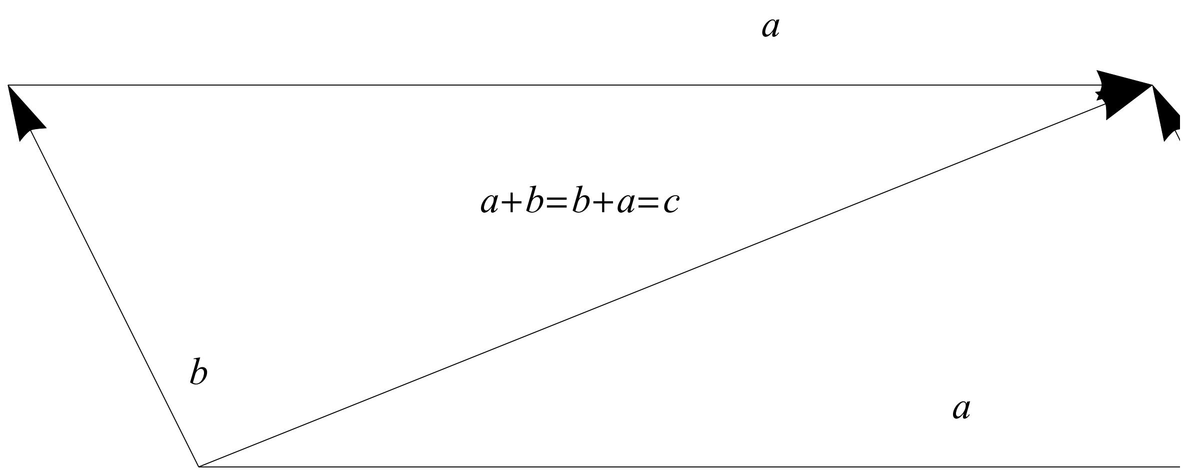


Vinkeln θ mellan två vektorer är vinkeln mellan dessa, sedda som vinkelben med gemensam startpunkt.

Addition av två vektorer: **a**+**b**=**b**+**a**=**c**$\Longleftrightarrow$**a**=**c**+(-**b**)=**a**-**b**.



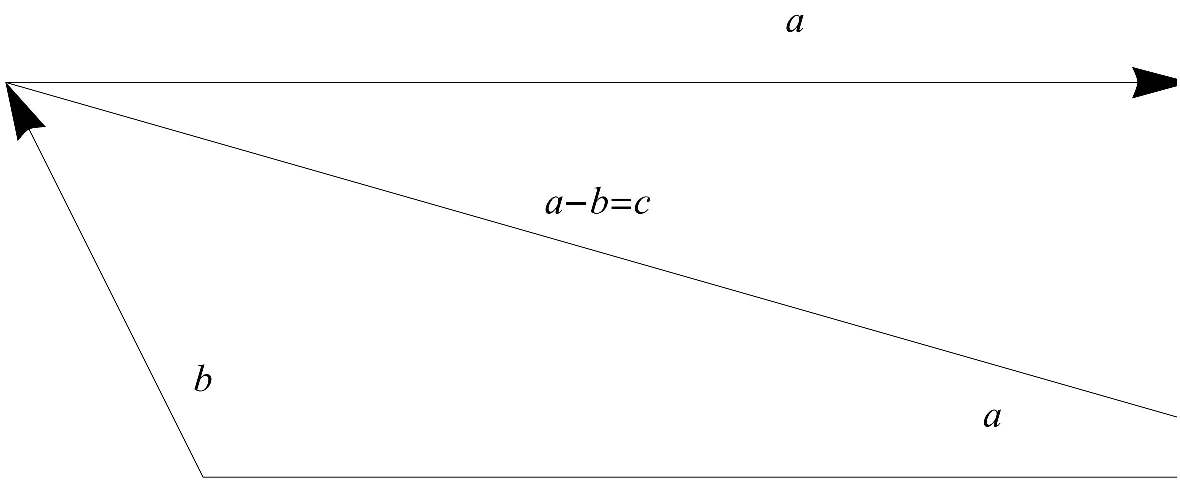
Addition av två vektorer uppfyller kommutativa lagen.



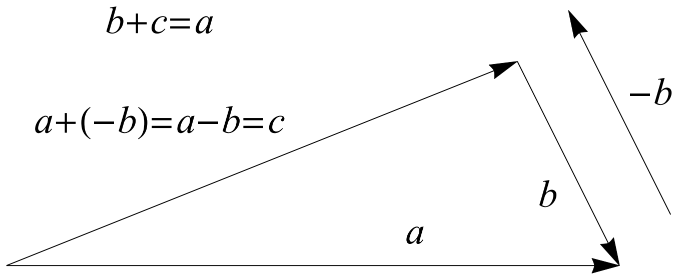
Subtraktion av vektorer

In[5]:=
```
Show[Graphics[Text["a-b=c", {-2, 2.4}]], Graphics[Arrow[{{-5, 3}, {2, 1}}]],
 Graphics[Text["-b", {2, 1.5}]],
 Graphics[Text["b", {-4, 1.5}]], Graphics[Arrow[{{1, 3}, {2, 1}}]],
 Graphics[Arrow[{{-4, 1}, {-5, 3}}]], Graphics[Arrow[{{-4, 1}, {2, 1}}]],
 Graphics[Arrow[{{-5, 3}, {1, 3}}]], Graphics[Text["a", {0, 1.3}]],
 Graphics[Text["a", {-1, 3.3}]]]
```

Out[5]=



Med vektorn $-b$ menas vektorn b men “motsatt riktad”.
Subtraktion av två vektorer $a = b + c \Longleftrightarrow a + (-b) = a - b = c$



En enhetsvektor har längd 1.
För en vektor $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ är $\frac{\boldsymbol{u}}{||\boldsymbol{u}||}$ en *enhetsvektor*.

$\mathbb{R}^2$

Vektor på komponentform $\boldsymbol{u}=(x_1, y_1)$, om får längden

$||\boldsymbol{u}||=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

Addition och subtraktion görs komponentvis.

$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2)$.

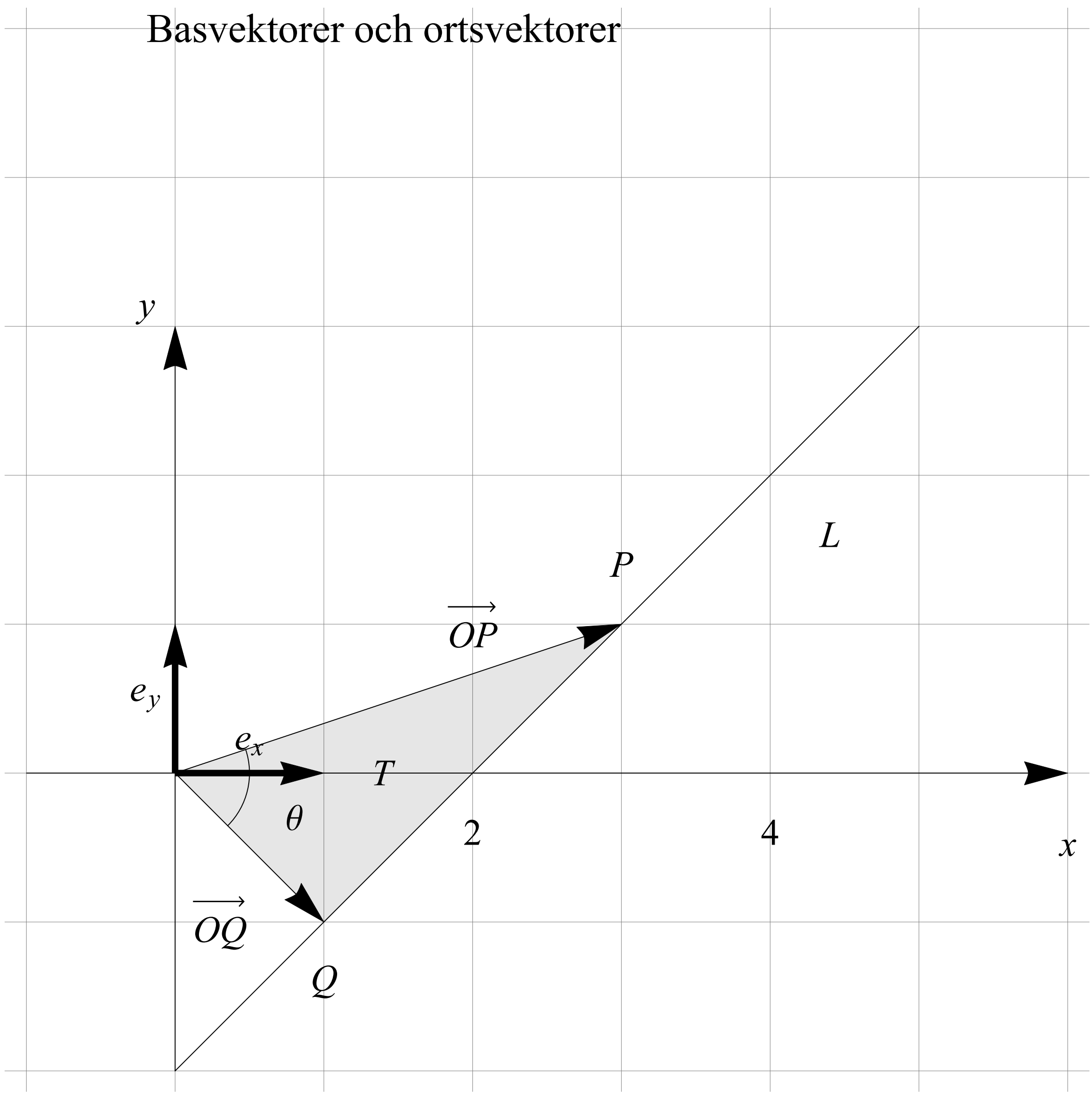
Enhetsvektorer längs x- och y-axeln

$e_x = i = (1, 0)$.

$e_y = j = (0, 1)$.

$$(x_1, y_1) = (x_1, 0) + (0, y_1)$$

$$x_1(1, 0) + y_1(0, 1)) = x_1\, e_x + y_1\, e_y.$$



$\mathbb{R}^3$

Vektor på komponentform $\boldsymbol{u}=(x_1, y_1, z_1)$, och har längden

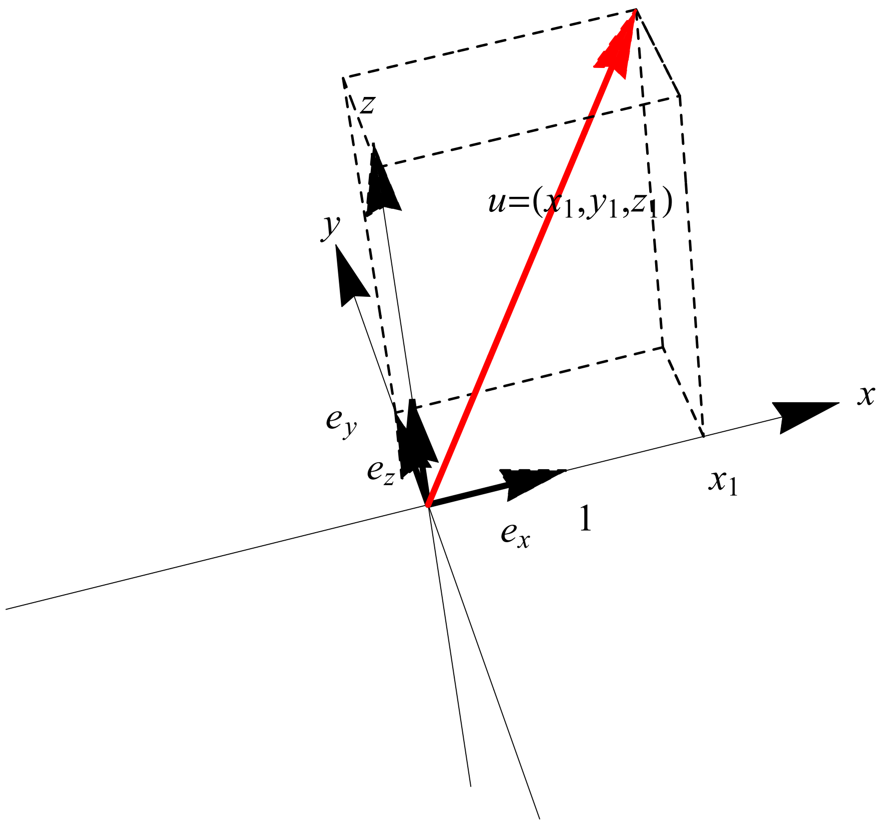
$\|\boldsymbol{u}\|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$

Addition och subtraktion görs komponentvis.

$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=(x_1, y_1, z_1)+(x_2, y_2, z_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$.

Koordinatsystemet i $\mathbb{R}^3$.

x, y och z axlarna utgör ett högersystem i den ordningen.
De är parvis vinkelräta (ortogonala).
Basvektorerna e_x, e_y, e_z är en ortonomerad bas. Man talar då om ett ONH-system.
$u = (x_1, y_1, z_1) = \{m.h.a.\ \text{basvektorerna}\} = x_1\ e_x + y_1\ e_y + z_1\ e_z$.



Skalär produkt

u·v=||***u***|| ||***v***||***cos*** θ (Definition, ej enligt boken Stewart kapitel 12)

Den är kommutativ och distributiv. Finns för alla vektor-rum $\mathbb{R}^n$.
För vektorer på komponentform görs multiplikationen ele-mentvis så är skalär produkt
i $\mathbb{R}^3$:
$u \cdot v = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

Formel för cosinus för vinkeln är $\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{||\boldsymbol{u}||\,||\boldsymbol{v}||}$

Vektorprodukt finns bara i $\mathbb{R}^3$.

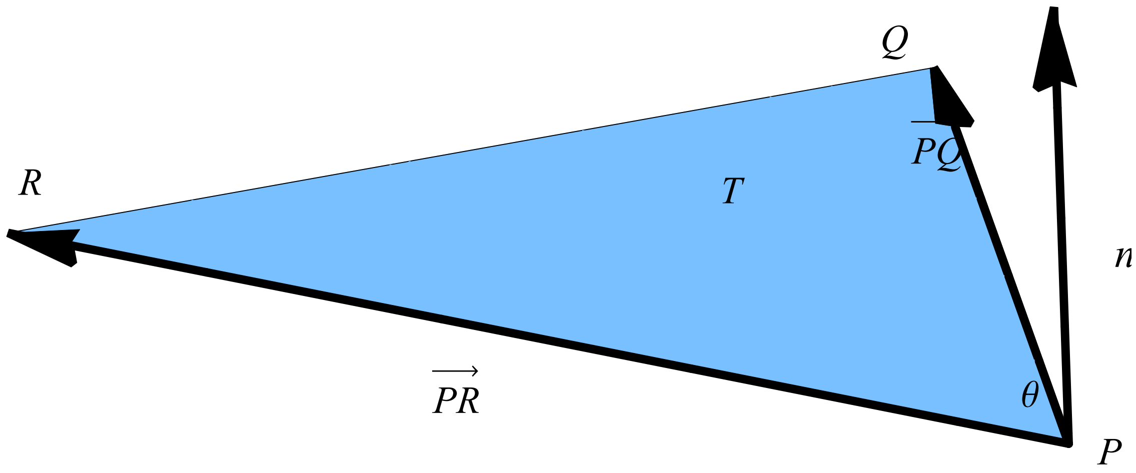
Längden är **|*u*×v|=|*u*||*v*|** sin θ.

u*×*v är vinkelrät mot ***u*** och ***v.***

(***u***, v***, u*×*v***) utgör ett högersystem.

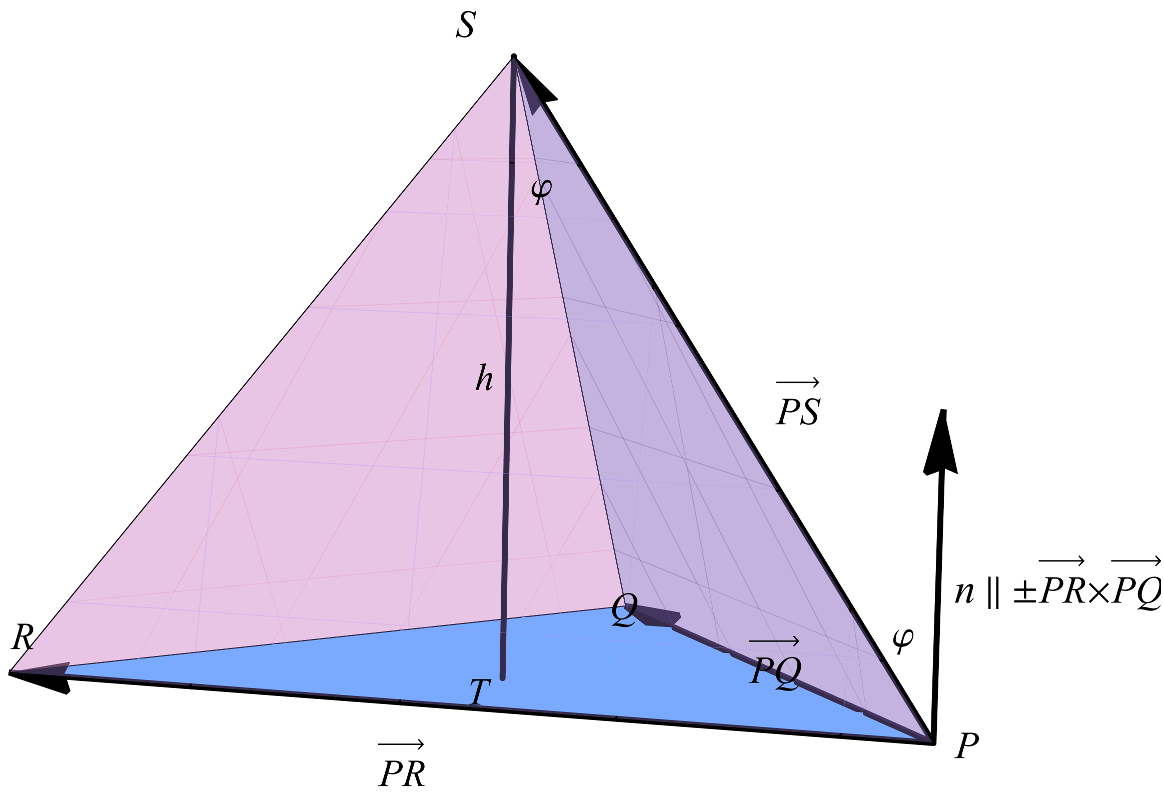
Planets ekvation i $\mathbb{R}^3$.

```
Show[Graphics3D[{Thickness[0.005], Arrow[{{3, 0, 0}, {0, 4, 0}}]}], Graphics3D[
  {Thickness[0.005], Polygon[{{-3, 0, 0}, {0, 4, 0}, {3, 0, 0}, {-3, 0, 0}}]}],
 Graphics3D[Text["T", {0, 2.0, 0}]],
 Graphics3D[Text["n ∥ ± PR→×PQ→", {3.7, 0.1, 1}]],


 Graphics3D[Text["PR→", {-0.37, 0.1, -0.4}]],
 Graphics3D[Text["PQ→", {2.4, 0, 1.3}]],
 Graphics3D[Text["θ", {2.7, 0.2,
    0.1}]],

 Graphics3D[{Thickness[0.005], Arrow[{{3, 0, 0}, {3, 0, 2}}]}],
 Graphics3D[{Thickness[0.005], Arrow[{{3, 0, 0}, {-3, 0, 0}}]}],
 Graphics3D[{Thickness[0.005], Arrow[{{3, 0, 0}, {0, 4, 0}}]}],
 Graphics3D[Text["P", {3.2, 0, 0}]],
 Graphics3D[Text["Q", {0.8, 2.3, 0.8}]],
 Graphics3D[Text["R", {-3, 0.2, 0.2}]],
 Axes → False, Boxed → False]
```



Triangel med hörn i punkterna *P, Q* och *R.*
Triangelns area betecknar vi med *T.*

Tetraeder.



Tetrader med bottenyta *T*, höjd *h* och alltså volym $V = \frac{T\,h}{3}$.