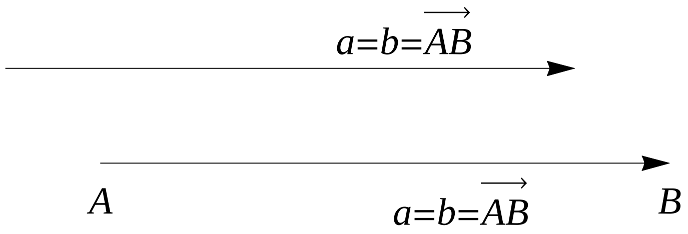
Linjär algebra

Vektoralgebra

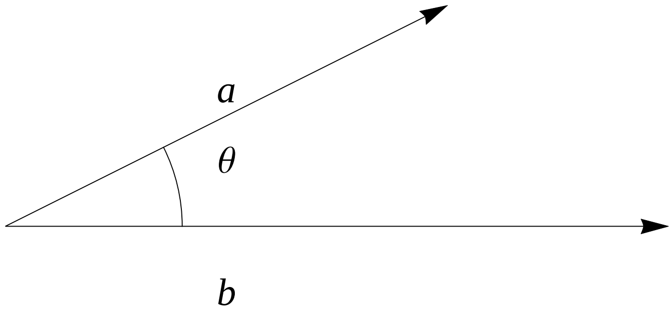
En vektor har längd och riktning och kännetecknas av dessa två egenskaper.
Detta gör vektorn möjlig att parallellförflytta (och förbli samma vektor).

Out[1794]=



I figuren: a=b eftersom de är parallella och lika långa.
Längden av vektorn a skrivs $|a| \geq 0$ med likhet precis då $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, nollvektorn (kan ritas som en punkt).

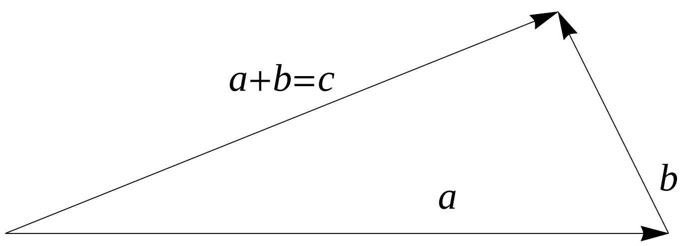
Out[1624]=



Vinkeln θ mellan två vektorer är vinkeln mellan dessa, sedda som vinkelben med gemensam startpunkt.

Addition av två vektorer och subtraktion: a+b=c$\Longleftrightarrow$a=c-b

Out[1639]=



En enhetsvektor har längd 1.

För en vektor $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ är $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ en enhetsvektor.

Vektor på komponentform $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$, om får längden

$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Addition och subtraktion görs komponentvis.
$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1, a_2, a_3)+(b_1, b_2, b_3)=(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.

Enhetsvsektorer längs x- y-och z-axeln $e_x = i = (1, 0, 0)$.
$e_y = j = (0, 1, 0)$
$e_z = k = (0, 0, 1)$

Skal är produkt

a·b=|***a***| |b|***cos*** θ

Den är kommutativ och distributiv. Finns för alla vektorrum $\mathbb{R}^n$.
För vektorer på komponentform görs multiplikationen elementvis så här
a·b

Out[1648]= $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Formel för cosinus för vinkeln är $\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$

Vektorprodukt finns bara i $\mathbb{R}^3$.

Längden är **|*a*◊*b*|=|*a*||*b*|** sin θ.

a*◊*b är vinkelrät mot ***a*** och ***b.***

(***a***, ***b, a*◊*b)*** utgör ett högersystem.

(orts-)vektor och punkt i $\mathbb{R}^2$

EX: Bektrakta punkterna P och Q och ortsvektorna OP och OQ.

In[1664]:=
```
OP := {3, 1}
OQ := {1, -1}
{OP + OQ, OP - OQ , -2 a, √OP.OP , √OQ.OQ , OP.OQ}
```

Out[1666]= $\{\{4, 0\}, \{2, 2\}, \{-6, -2\}, \sqrt{10}, \sqrt{2}, 2\}$

Vi ser att addition och subtraktion ker elementvis, som tidigare.

Punkten P och ortvektorn OP. Likheter och skillnader.

In[1670]:= $\left\{\frac{OP.OQ}{\sqrt{OP.OP}\ \sqrt{OQ.OQ}}, \text{ArcCos}\left[\frac{OP.OQ}{\sqrt{OP.OP}\ \sqrt{OQ.OQ}}\right] 180 / Pi\ //\ N\right\}$

Out[1670]= $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}, 63.4349\right\}$

EX: Linje på vektorform/parameterform i $\mathbb{R}^2$.

In[1672]:=
```
(OP - OQ) / 2 t + OP
```

Out[1672]= {3 + t, 1 + t}

EX: Bestäm de punkter som ligger på linjen på avståndet 1 från P.

In[1673]:=
```
v = (OP - OQ) / 2
```

Out[1673]= {1, 1}

In[1674]:= $e = \frac{v}{\sqrt{v.v}}$

Out[1674]= $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

In[1680]:= {OP, OP + e, OP - e}

Out[1680]= $\left\{\{3, 1\}, \left\{3+\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{3-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$

Planets ekvation i $\mathbb{R}^3$.

EX: Givet tre punkter, som inte ligger på linje, definierar ett plan i $\mathbb{R}^3$.

In[1751]:=
```
P := {1, 1, -1}
Q := {2, -1, -2}
R := {4, 6, 7}
S := {2, 3, 1}
{Q - P, R - P, Cross[Q - P, R - P]}
n = Cross[Q - P, R - P] / (-11)
```

Out[1755]= {{1, -2, -1}, {3, 5, 8}, {-11, -11, 11}}

Out[1756]= {1, 1, -1}

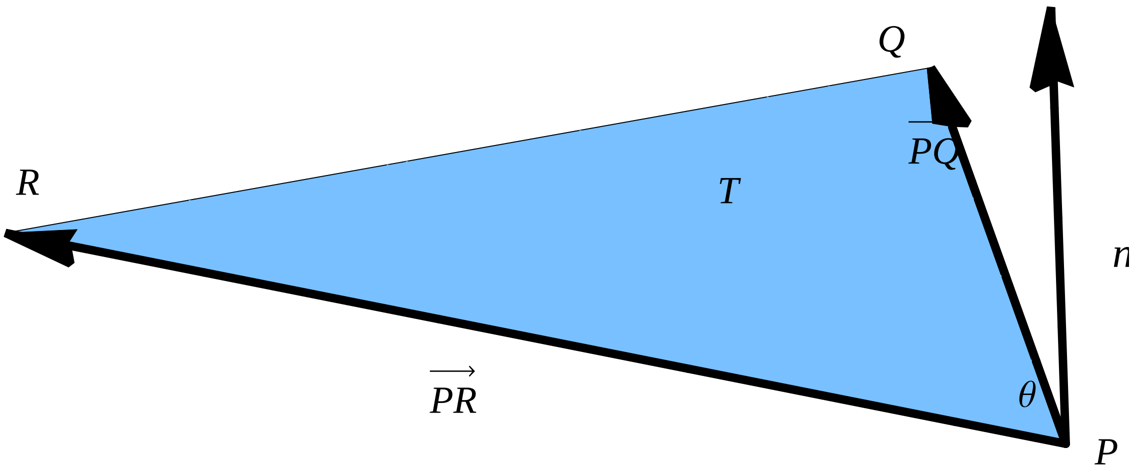
a) Bestäm arean på triangeln med hörn i P, q och R.

In[1759]:= $\frac{\text{Cross}[Q-P, R-P].\text{Cross}[Q-P, R-P]}{2}$

In[1760]:= $\frac{\sqrt{363}}{2}$

Out[1760]= $\frac{11\sqrt{3}}{2}$

Out[1893]=



Triangel med hörn i punkterna *P, Q* och *R.*
Triangelns area betecknar vi med *T.*

b) Bestäm en ekvation på planet som innehåller punkterna.

In[1763]:=
```
(Cross[Q - P, R - P].({x, y, z} - P)) / (-11) // Expand
```

Out[1763]= $-3 + x + y - z$

c) Bestäm ekvationen för linjen genom punkterna P och S.

In[1734]:=
```
(S - P) t + P
```

Out[1734]= $\{1 + t, 1 + 2 t, -1 + 2 t\}$

d) Bestäm linjens ekvation som går genom S och är vinkelrät mot planet.

In[1764]:=
```
S + n t
```

Out[1764]= $\{2 + t, 3 + t, 1 - t\}$

In[1757]:=
```
n.({x, y, z} - P) // Expand
```

Out[1757]= $-3 + x + y - z$

e) Skär linjerna varandra?

In[1766]:=
```
Remove[s]
```

In[1768]:=
```
Solve[{S + n t == (S - P) t + P}, {s, t}]
```

Out[1768]= { }

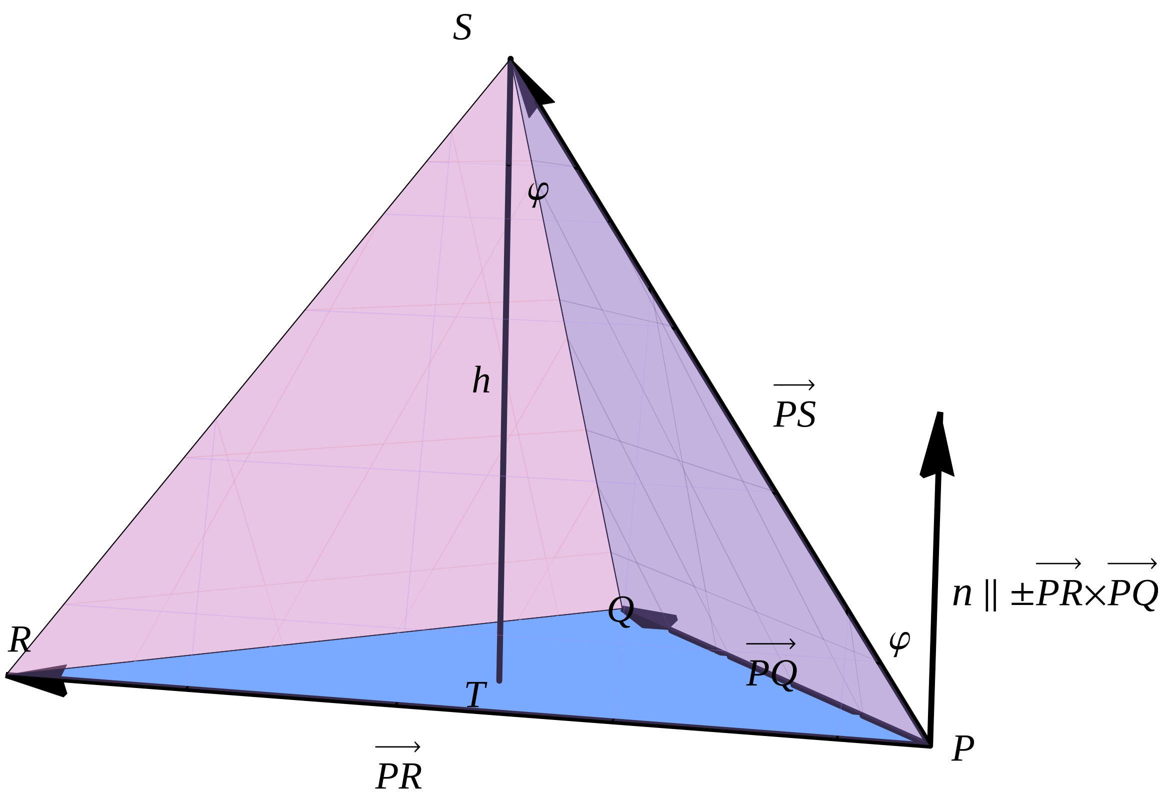
f) Givet samtliga punkter P, Q, R och S. Dessa utgör hörn i en tetraeder. Beräkna tetraederns volym!

In[1772]:=
$$\frac{\texttt{Cross[Q - P, R - P].(S - P)}}{6}$$

Out[1772]=
$$-\frac{11}{6}$$

g) Bestäm avståndet mellan planet och punkten *S*.

Out[1873]=



Tetrader med bottenyta *T*, höjd *h* och alltså volym $V = \frac{T\,h}{3}$.