

October 9, 2017

## Innehållsregister

<b>1</b>	<b>Vektorer</b>	<b>1</b>
1.1	Geometrisk vektor . . . . .	1
1.2	Vektor och koordinatsystem . . . . .	1
1.3	Skalär produkt (dot eller inner product) . . . . .	2
1.4	Vinkel mellan vektorer . . . . .	3
1.5	$\mathbb{R}^3$ . . . . .	3
1.6	Vektorprodukt (Cross product) . . . . .	4
1.7	Beräkning av vektorprodukt som determinant . . . . .	5
1.7.1	Avstånd mellan punkt och plan . . . . .	9
1.7.2	Avstånd mellan punkt och linje . . . . .	10

### 1 Vektorer

#### 1.1 Geometrisk vektor

Med en geometrisk vektor menas vektor utan koordinatsystem. Där definieras vektoralgebran. Vi definierar följande egenskaper.

- En vektor betecknas med gemen och fet stil  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  etc.
- En vektor äger två egenskaper längd  $\|\mathbf{u}\|$  och riktning.
- En vektor kan förflyttas parallellt.
- $\|\mathbf{u}\| \geq 0$  med liket omm  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , nollvektorn.
- Vektorn  $c\mathbf{u}$  är vektorn (anti-)parallell med  $\mathbf{u}$ , där  $c \geq 0$  ( $c < 0$ ) och har längden  $\|c\mathbf{u}\| = |c| \cdot \|\mathbf{u}\|$ .
- Vinkeln mellan två vektorer är vinkeln  $\theta$  mellan vinkelbenen  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$ , där startpunkterna sammanfaller.  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Om  $\theta = 0$  ( $= 0^\circ$ ) är vektorerna parallella. Om  $\theta = \pi$  ( $= 180^\circ$ ) är vektorerna motsatt riktade eller antiparallella.
- Addition av vektorer: Vektorn  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  är vektorna med startpunkt som  $\mathbf{u}$  och slutpunkt som  $\mathbf{v}$  då  $\mathbf{u}$ :s slutpunkt och  $\mathbf{v}$ :s startpunkt sammanfaller.

#### 1.2 Vektor och koordinatsystem

- Givet en punkt  $P = (1; 2)$  så är 1 och 2 dess *koordinater*. Motsvarande *ortsvektor* är  $\overrightarrow{OP} = (1, 2)$  med startpunkt i origo och slutpunkt i  $P$ . 1 och 2 är dess *komponenter*.

- Längden av vektorn är då  $\|(1, 2)\| = \sqrt{1^2 + 2^2}$ , som ju också är avståndet mellan origo och punkten  $P = (1; 2)$ .
- Addition av vektorer är komponentvis. Multiplikation med skalär (reellt tal) ger också komponentvis.

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1, 2) + (5, 4) = (6, 6), \quad c \cdot \mathbf{u} = (c, 2c) \text{ med längd } |c| \cdot \sqrt{5}.$$

- Linjens ekvation på parameter/vektorform:
  - Givet två punkter  $P = (1; 2)$  och  $Q = (5; 4)$ . Definiera motsvarande Ortsvektorer  $\overrightarrow{OP} = \mathbf{u} = (1, 2)$  och  $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{v} = (5, 4)$ . Bestäm en ekvation genom dessa två punkter:  
Startpunkt, som vektor, kan vi ta  $\mathbf{r}_0 := \mathbf{u} = \overrightarrow{OP} = (1, 2)$  och som riktningvektor kan vi ta  $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (4, 2)$ . En Ortsvektor på linjen kan uttryckas med dessa men först halverar vi  $\mathbf{v}$ :s längd så vi får  $\mathbf{v}_1 = (2, 1)$  ( $\| (4, 2) \|$ ).

$$\mathbf{r} := (x, y) = \mathbf{r}_0 + t \cdot \mathbf{v}_1 \text{ eller } (x, y) = (1, 2) + t(2, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vi kan eliminera  $t$  ur första koordinaten och likaså ur andra:

$$t = \frac{x-1}{2} = y-2 \implies y = \frac{x+3}{2}.$$

- En enhetsvektor  $\mathbf{e}$  är en vektor med längd 1. Ex.vis är  $\mathbf{u} = (1, 2)$  inte en enhetsvektor eftersom dess längd är  $\sqrt{5}$ . Men däremot är  $\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$  en enhetsvektor  $\| (1, 2) \|$ .
- Enhetsvektorer parallella med koordinataxlarna är

$$\begin{cases} (1, 0) & = \mathbf{i} = \mathbf{e}_x \\ (0, 1) & = \mathbf{j} = \mathbf{e}_y \end{cases} \text{ i } \mathbb{R}^2 \text{ och } \begin{cases} (1, 0, 0) & = \mathbf{i} = \mathbf{e}_x \\ (0, 1, 0) & = \mathbf{j} = \mathbf{e}_y \\ (0, 0, 1) & = \mathbf{k} = \mathbf{e}_z \end{cases} \text{ i } \mathbb{R}^3.$$

Man kan skriva en vektor  $\mathbf{u} = (x_1, y_1) = (x_1, 0) + (0, y_1) = x_1 \cdot (1, 0) + y_1 \cdot (0, 1) = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j}$ .

### 1.3 Skalär produkt (dot eller inner product)

**Definition 1.1** Skalärprodukten  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos \theta$ .

## Kommentarer

- $\cos 0^\circ = 1$ ,  $\cos 90^\circ = 0$  och  $\cos 180^\circ = -1$ , så att

$$-||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}|| \leq \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \leq ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}||.$$

Dessutom är  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ , om  $\theta = 90^\circ$ .

- Man kan visa att skalärprodukten är distributiv:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}.$$

- Speciellt för en vektor med längd 1 är

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = ||\mathbf{e}|| \cdot ||\mathbf{e}|| \cdot \cos 0^\circ = 1.$$

Och mer allmänt

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = ||\mathbf{u}||^2.$$

Om två vektorer är vinkelräta är  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}|| \cos 90^\circ = 0$ .

- Ex.vis är

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (1, 2) \cdot (5, 4) = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot (5\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = \\ &= \mathbf{i} \cdot 5\mathbf{i} + \mathbf{i} \cdot 5\mathbf{j} + 2\mathbf{j} \cdot 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \cdot 4\mathbf{j} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 13. \end{aligned}$$

- Allmänt är

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1x_2 + y_1y_2.$$

### 1.4 Vinkel mellan vektorer

Vinkeln mellan vektorerna  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}|| \cdot \cos \theta \iff \cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}||}.$$

- Vinkeln mellan vektorerna  $\mathbf{u} = (1, 2)$  och  $\mathbf{v} = (5, 4)$  ges av sambandet

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}||} = \frac{13}{\sqrt{5} \cdot 41} \iff \theta = \arccos \left( \frac{13}{\sqrt{5} \cdot 41} \right)$$

- P.s.s. är cosinus för vinkeln mellan  $(1, 3)$  och  $(1, -2)$

$$\cos \theta = \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2)}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \theta = 135^\circ.$$

## 1.5 $\mathbb{R}^3$

Koordinataxlarna  $x$ -,  $y$ - och  $z$ -axeln bildar ett *högersystem* i den ordningen. Addition och multiplikation med skalär, samt skalär produkt är som i  $\mathbb{R}^2$ .

EXEMPEL 1.1 Givet  $P = (1; 2; 1)$  och  $Q = (3; 5; 8)$ . Då är linjens ekvation på parameterform (genom dessa två punkter)

$$(x, y, z) = t\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{OP} \text{ och med siffror } \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t + 2, t \in \mathbb{R}. \\ z = 7t + 1 \end{cases}$$

■

EXEMPEL 1.2 Vinkeln mellan  $\overrightarrow{OP} = (1, 2, 1) =: \mathbf{u}$  och  $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{v}$  beräknas p.s.s. som  $\mathbb{R}^2$ :

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} = \frac{(1, 2, 1) \cdot (3, 5, 8)}{\|(1, 2, 1)\| \cdot \|(3, 5, 8)\|} = \frac{21}{\sqrt{6}\sqrt{98}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \theta = 30^\circ.$$

■

## 1.6 Vektorprodukt (Cross product)

Det finns en vektoriell produkt (vektorprodukt eller cross product) men bara i  $\mathbb{R}^3$ . Givet två vektorer  $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$  och  $\mathbf{v} = (3, 5, 8)$ . Dessa kan läggas i ett plan i  $\mathbb{R}^3$ .

**Definition 1.2** Man definierar då en tredje vektor utifrån dessa två som skrivs  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ . För  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  gäller följande

1.  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{u}$  och  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{v}$ .
2.  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}$  bildar ett *högersystem*.
3. Längden  $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \theta$ .

### Kommentarer

- $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$  eftersom dess längd är  $\|\mathbf{u}\|^2 \cdot \sin \theta$  och vinkeln mellan  $\mathbf{u}$  och sig själv är  $\theta = 0^\circ$  och  $\sin 0^\circ = 0$ .

- Om  $\theta = 90^\circ$  är  $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cdot 1$
- Ett högersystem utgörs av höger hands tumme, pekfinger och långfinger (i den ordningen).

**Sats 1.1**

- Vektorprodukten är antikommutativ, som betyder att

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}.$$

- Vektorprodukten är vänster- och högerdistributiv (men inte associativ).

EXEMPEL 1.3 Ex,vis är  $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$  och  $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$ .

**Bevis:**  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} \parallel \mathbf{k}$  eftersom båda vektorerna är vinkelräta mot både  $\mathbf{i}$  och  $\mathbf{j}$  samt bildar ett högersystem med  $\mathbf{i}$  och  $\mathbf{j}$  (i den ordningen). Vi visar nu att de har samma längd,  $\|\mathbf{k}\| = 1$  per definition.

$$\|\mathbf{i} \times \mathbf{j}\| = \|\mathbf{i}\| \cdot \|\mathbf{j}\| \sin 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

V.S.B

■

■

**Kommentarer**

- 

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

och

$$\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$$

### 1.7 Beräkning av vektorprodukt som determinant

Vi sätter  $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$  och  $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ . Då blir

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Detta kan göras genom att beräkna determinanten (ex,vis med Sarrus regel).

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

EXEMPEL 1.4

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (1, 2, 1) \times (3, 5, 8) = \dots = (11, -5, -1).$$

■

EXEMPEL 1.5 Beräkna arean av triangeln med hörn i  $P = (1; 1; 3)$ ,  $Q = (2; 3; 4)$  och  $R = (4; 6; 11)$ .

#### Lösning

Bilda vektorna

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (2, 3, 4) - (1, 1, 3) = (1, 2, 1)$$

och

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (4, 6, 11) - (1, 1, 3) = (3, 5, 8).$$

Triangelns area är  $T = \frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{PR}| \sin \theta$ , där  $\theta$  är vinkeln mellan  $\overrightarrow{PQ}$  och  $\overrightarrow{PR}$ . Men detta är just halva beloppet/längden av  $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ . Arealen är

$$T = \frac{1}{2} \sqrt{11^2 + (-5)^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{147} = \frac{7}{2} \cdot \sqrt{3} \text{ a.e.}$$

■

EXEMPEL 1.6 **Projektion**

Givet två vektorer  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  (geometriska vektorer). Man talar om *skalär projektion av  $\mathbf{u}$  på  $\mathbf{v}$* . Den är

$$\|\mathbf{u}\| \cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}.$$

För att göra en *vektoriell projektion*, multiplicerar vi den skalära projektionen med enhetsvektorn parallell med  $\mathbf{v}$ , som blir

$$\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}.$$

Med  $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$  och  $\mathbf{v} = (3, 5, 8)$  blir dessa

$$\|\mathbf{u}\| \cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ respektive } \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{98}(63, 105, 168) = \frac{1}{14}(9, 15, 24) = \frac{3}{14} \mathbf{v}.$$

■

#### EXEMPEL 1.7 Ekvation för ett plan

Betrakta punkterna i föregående exempel. De ligger inte på linje ty i så fall vore  $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \mathbf{0}$ , nollvektorn.

Villkoret för att en punkt  $(x; y; z)$  ligger i planet är ekvivalent med att vektorn

$$\overrightarrow{OP} - (x, y, z) \perp (11, -5, -1).$$

Det är i sin tur ekvivalent med att skalärprodukten

$$[(x, y, z) - (1, 1, 3)] \cdot (11, -5, -1) = 11x - 5y - z - 3 = 0.$$

■

#### EXEMPEL 1.8 Volym av tetraeder

Vi observerar först att volymen för en tetraeder, pyramid eller kon ges av

$$V = \frac{B \cdot h}{3} \text{ där } h \text{ och } B \text{ är höjd respektive basytans area.}$$

Punkterna  $P$ ,  $Q$  och  $R$  kompletteras nu med punkten  $S = (4; 4; 6)$ . Beräkna volymen  $V$  av tetraedern med hörn i dessa fyra punkter.

#### Lösning

”bottentriangelns” area är  $\frac{7}{2} \cdot \sqrt{3}$  a.e. Vi skall inte utgå från detta utan ser att  $(11, -5, -1)$  är (anti-)parallell med tetraederns höjd  $h$ . Vektorn  $\overrightarrow{PS}$  bildar vinkeln  $\varphi$  med  $(11, -5, -1)$ . Den skalära produkten

$$\overrightarrow{PS} \cdot (11, -5, -1) = \|(11, -5, -1)\| \cdot \underbrace{\|\overrightarrow{PS}\| \cdot \cos \varphi}_{= h} = h \cdot 2T.$$

Volymen kan med dessa beteckningar skrivas

$$V = \frac{h \cdot T}{3}.$$

Nu är  $\vec{PS} = (4, 4, 6) - (1, 1, 3) = (3, 3, 3)$ . Alltså är

$$V = \frac{3}{6} (11, -5, -1) \cdot (1, 1, 1) = \frac{5}{2} \text{ v.e.}$$

■

### Kommentarer

- Det kan hända att vinkeln  $\varphi$  är trubbig. Det ger volymen med fel tecken. Justeras med teckenbyte till ett tal  $\geq 0$ .
- Vi har alltså beräknat

$$\vec{PS} \cdot (\vec{PQ} \times \vec{PR})$$

en *trippel skalär produkt*. Den kan direkt beräknas som en determinant, med  $\vec{PS} = (x_3, y_3, z_3)$ :

$$\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \{2 \text{ radbyten}\} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

EXEMPEL 1.9 Givet ES

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

vars lösning är en linje L1 (Ex 1.8 i linalggebra01.pdf) och linjen L2:  $(x, y, z) = t(2, -1, 1) + (-1, 1, 1) \quad t \in \mathbb{R}$ .

Avgör om linjerna skär varandra.

### Lösning

Lösningen på ES är

$$\begin{cases} x = 7t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$$



Skärningen bör vara en punkt men det behöver inte vara samma  $t$  i båda ekvationerna. Vi byter därför  $t$  mot  $s$  i den sista ekvationen. Det ger ett ES

$$\begin{cases} 7s = 2t - 1 \\ 1 - 3s = 1 - t \\ 2s = t + 1 \end{cases} \iff s = -1, \quad t = -3.$$

Eftersom detta överbestämda ES *har* lösning, finns en skärningspunkt. Den erhålls genom att sätta in  $t = -3$  i L2:

$$(x; y; z) = (-7; 4; -2).$$

■

EXEMPEL 1.10 De två linjerna i Ex 1.8 i linalgbra01.pdf skär alltså varandra längs linjen L1:

$$\begin{cases} x = 7t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Bestäm det plan som är vinkelrät mot planen  $\Pi_1$  och  $\Pi_2$  givna av

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

och innehåller skärningspunkten  $(-7; 4; -2)$ .

### Lösning

Planen har normalvektorer  $\mathbf{n}_1 = (1, 1, -2)$  och  $\mathbf{n}_2 = (0, 2, 3)$ . En vinkelrät vektor mot dessa är  $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (7, -3, 2)$ , riktningsvektorn för skärningslinjen!

Planet som söks, kallar vi  $\Pi_3$ . Det har denna vektor som normalvektor. Alltså  $\mathbf{n}_3 = (7, -3, 2)$ . Ekvationen får som

$$(7, -3, 2) \cdot ((x, y, z) - (-7, 4, -2)) = 7x - 3y + 2z + 65 = 0 \text{ (Svar)}$$

■

### 1.7.1 Avstånd mellan punkt och plan

- Givet en punkt  $P_1$  med motsvarande Ortsvektor  $\mathbf{r}_1 = (x, y, z)$  och ett plan  $\Pi$ , med normalvektor  $\mathbf{n}$  och  $P_0$  en punkt i planet med motsvarande Ortsvektor  $\mathbf{r}_0$ . Avståndet mellan punkten och planet ges av

$$d = \frac{|\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad (1)$$

där planets ekvation är  $Ax + By + Cz + D = 0$ .

EXEMPEL 1.11 Vi har, i exempel 1.7 planet med ekvation

$$\Pi_0 : 11x - 5y - z - 3 = 0.$$

Exempel 1.8 har vi tetraedern med basyta i detta plan. Ett fjärde hörn är  $S = (4; 4; 6) = (x; y; z)$ . Tetraederns volym är  $V = \frac{5}{2}$  (v.e.). Vi skall nu beräkna avståndet mellan planet och punkten  $S$ . Det är, per definition det minsta avståndet. Vi får avståndet så här: Tag ex.vis vektorn  $\overrightarrow{PS} = (3, 3, 3)$ . Den bildar en vinkel  $\varphi$  med normalvektorn  $\mathbf{n} = (11, -5, -1)$ . Avståndet är  $d = \|\overrightarrow{PS}\| \cos \varphi$ . Avståndet kan skrivas

$$d = \frac{\|\mathbf{n}\| \cdot \|\overrightarrow{PS}\| \cos \varphi}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PS}}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{(11, -5, -1) \cdot ((x, y, z) - (1, 1, 3))}{\sqrt{11^2 + (-5)^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{3}}{7} \text{ l.e.}$$

Nu är avståndet  $d$  också höjden i tetraedern. Triangelns area är  $T = \frac{7\sqrt{3}}{2}$ . Tetraederns volym kan alltså skrivas

$$V = \frac{Th}{3} = \frac{\frac{7\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{7}}{3} = \frac{5}{2} \text{ v.e., som tidigare.}$$

■

### 1.7.2 Avstånd mellan punkt och linje

- Givet en punkt  $P$  och en linje. Hur får man avståndet mellan dessa? Med avstånd menas det minsta, som samtidigt är det vinkelräta avståndet. Genom att rita ser vi att avståndet ges av

$$d = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0\| \sin \theta = \frac{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0\| \sin \theta}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\|\mathbf{v} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\|}{\|\mathbf{v}\|},$$

d.v.s.

$$d = \frac{\|\mathbf{v} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\|}{\|\mathbf{v}\|}, \quad (2)$$

där  $\mathbf{v}$  är riktningsvektor för linjen och  $\mathbf{r}_0$  är en punkt sedd som Ortsvektor på linjen.

EXEMPEL 1.12 Givet linjen  $L_2$  i exempel 1.9:  $(x, y, z) = t(2, -1, 1) + (-1, 1, 1)$  och punkten  $Q = (4; 6; 11)$  (exempel 1.5). Beräkna avståndet mellan dessa.

Avståndet  $d$

#### Lösning

Avståndet är

$$d = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0\| \sin \theta = \frac{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0\| \sin \theta}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\|\mathbf{v} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\|}{\|\mathbf{v}\|}.$$

$$\mathbf{r}_0 = (-1, 1, 1), \mathbf{r}_1 = (4, 6, 11) \text{ och } \mathbf{v} = (2, -1, 1).$$

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = (5, 5, 10) \implies \mathbf{v} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) = 5(-3, -3, 3).$$

Täljaren och nämnaren är alltså

$$15\|(-3, -3, 3)\| = 15\sqrt{3} \text{ respektive } \sqrt{6}, \text{ som ger } d = \frac{15\sqrt{2}}{2}.$$



EXEMPEL 1.13 Planet  $\Pi$ :  $11x - 5y - z = 3$  och punkten  $S := (4; 4; 6)$  är givna.

- (a) Ge en ekvation för linjen vinkelrät mot planet och som går genom  $S$ .
- (b) Ange projektionspunkten  $S_p$  i planet.
- (c) Beräkna avståndet mellan  $S$  och  $\Pi$ .

**Lösning**

- (a) Linjen har planet som normalvektor, så ekvationen är

$$(x, y, z) = (11, -5, -1)t + (4, 4, 6), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (b) Projektionspunkten  $S_p$  i planet: Sätt in linjens koordinater i  $\Pi$ :s ekvation:

$$-5(3 - 5t) + t + 11(11t + 3) - 3 = 0 \iff t = -\frac{5}{49}.$$

Sätt nu in detta  $t$  i linjens ekvation:

$$S_p = \left( \frac{141}{49}; \frac{221}{49}; \frac{299}{49} \right).$$

- (c) Avståndet är

$$|S - S_p| = ||t \cdot \mathbf{n}|| = \frac{5\sqrt{3}}{7} \text{ l.e.}$$

