Chalmers Tekniska Högskola

Dugga 2 för DAI1 och EI1, LMA 212, 20181018, 13.00-15.00

Lärare Reimond Emanuelsson, tel 772 5892/0708 948 456
Ge endast svar på uppgifterna 1 till 4 och fullständig lösning på uppgift 5.

1. Givet matriserna

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1009 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Beräkna (a) $\det \boldsymbol{A}$ (b) $\det \boldsymbol{B}$ (c) $\det \boldsymbol{C}$ (d) $\det(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})$. 4.0 p

2. Givet en kvadratisk matris $\boldsymbol{A}$. Ange värdet av $\det \boldsymbol{A}'$ uttryckt i $\det \boldsymbol{A}$, där matrisen $\boldsymbol{A}'$ erhålls genom radoperationen

   a) multiplikation av en rad som sedan adderas till en annan rad (R1).
   b) radbyte (R2).
   c) multiplikation av en rad med ett tal $c \neq 0$ (R3). 3.0 p

3. Vilka samband gäller (d.v.s. är identiteter), för alla vektorer $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$ i $\mathbb{R}^3$? Poäng endast om alla svar är riktiga.

(a) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$	(b) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$	(c) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$
(d) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$	(e) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$	(f) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \lvert\boldsymbol{a}\rvert^2$

3.0 p

4. Givet fyra punkter P, Q, R och S i $\mathbb{R}^3$.
   Med vektorer uttryckta i punkterna ovan ange

   (a) arean T av triangeln med hörn i P, Q och R. 1.0 p
   (b) volymen av tetraedern med hörn i de fyra punkterna. 2.0 p

5. Låt $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$ vara inverterbara matriser av typ $n \times n$.

   (a) Bevisa att $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$. 1.5 p
   (b) Bevisa att $\boldsymbol{A}$ har invers $\Longrightarrow \det \boldsymbol{A} \neq 0$.
   Ledning: Använd att $\det(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) = \det \boldsymbol{A} \cdot \det \boldsymbol{C}$. 1.5 p

.