Lösningsförslag till Tentamen i Linjär algebra, 3.7 hp, LMA212 för DAI1 och DEI1, 20181101,08.30-12.30

tel 031 772 5881/0708 948 456. Lärare: Reimond Emanuelsson

Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare

1. Låt $z = -\dfrac{1+4j}{5+3j}$.

   (a)
   $$z = -\frac{1+4j}{5+3j} \cdot \frac{5-3j}{5-3j} = -\frac{17+17j}{34} = -\frac{1}{2} - \frac{j}{2}.$$
   (b) Beräkna $|z| = \sqrt{(-1/2)^2 + (-1/2)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. (c) $\operatorname{Im} z = -\dfrac{1}{2}$. (d) $\arg z = -\dfrac{3\pi}{4}$.

   2.0p

2. Givet matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

   (a)
   $$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \ldots == \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

   (c) Bestäm talet p...
   $$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{p} \begin{bmatrix} -p & 4 & p \\ 3 & -3 & -p \\ -p & p & p \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{p} \begin{bmatrix} 4-p & 0 & 2p-4 \\ 0 & 6-2p & 6-3p \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} = \boldsymbol{I} \Longleftrightarrow p = 2,$$
   som ger inversmatrisen till matrisen $\boldsymbol{A}$: 1.5p
   $$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (b)
   $$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Givet matrisekvationen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, där $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Visa att matrisekvationen saknar lösning $\boldsymbol{x}$...
   Matrisform:
   $$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \end{array}\right]$$
   Och $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = 2 < \operatorname{rang}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = 3$, så lösning saknas. 0.5p

   (b) Lös matrisekvationen med MK-metoden... 2.5p
   $$\Longrightarrow \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A}^t \cdot \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{b}.$$
   Nu är $\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, så att även $\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   (c) Beräkna medelfelet η...
   $$\eta = \frac{|\boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}.$$
   1.0p

   (d) Visa att...
   $$\boldsymbol{A}_L^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}_2$$
   alltså vänsterinvers och lös matrisekvationen...
   $$\boldsymbol{A}_L^{-1} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$
   1.0p

4. Givet punkterna $P = (1;1;0)$, $Q = (2;3;1)$ och $R = (4;4;3)$.

   (a) Arean av triangeln
   $$T = \frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \frac{||(-3,0,3)}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$
   med hörn i P, Q och R. 2.0p

(b) En ekvation för planet Π, som innehåller punkterna P, Q och R: Normalvektor $\boldsymbol{n} = (1, 0, -1)$.

$$(1, 0, -1) \cdot ((x, y, z) - (4, 4, 3)) = x - z - 1 = 0$$

2.0p

5. Givet planet Π med ekvationen $x - z = 1$ och linjen L med ekvationen $\begin{cases} x &= 2t - 1 \\ y &= t \\ z &= 1 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Skärningspunkten mellan L och planet Π:

$$x - z - 1 = (2t - 1) - (1 - t) - 1 = 3t - 3 = 0 \Longleftrightarrow t = 1.$$

Skärningspunkten är $P_0 = (2 \cdot 1 - 1; 1; 1 - 1) = (1; 1; 0) = P$. 1.5p

(b) Vinkeln θ mellan linjen L och planet Π ges av ($\boldsymbol{v} = (2, 1, -1)$)

$$\sin\theta = \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{n}| \cdot |\boldsymbol{v}|} = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 60°.$$

2.5p

6.
Givet punkterna $P_1 = (1; 2)$, $P_2 = (5; -1)$ och $P_3 = (4; 6)$.

(a) Visa att sträckorna P_1P_2 och P_1P_3 är lika långa ...

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5, \quad |\overrightarrow{P_1P_3}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

och vinkelräta...

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_3} = (4, -3) \cdot (3, 4) = 0.$$

2.0p

(b) Punkterna utgör hörnen i en kvadrat (enligt a)). Bestäm koordinaterna för det fjärde hörnet...
Det fjärde hörnet koordinater ges av ortsvektorn

$$\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_3} = (8, 3) \text{ alltså } P_4 = (8; 3).$$

2.0p

7. Polynomet $f(z) = 3z^3 + 11z^2 + 11z - 5$ har nollstället $z_1 = a + j$., där $a < 0$ är ett reellt tal.

(a) Lös ekvationen $f(z) = 0$...

$$f(a + j) = 3a^3 + (11 + 9j)a^2 + (2 + 22j)a - (16 - 8j) \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Re:} & 3a^3 + 11a^2 + 2a - 16 = 0 \\ \text{Im:} & 9a^2 + 22a + 8 = 0 \end{cases}$$

$$9a^2 + 22a + 8 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} a &= -2 \\ a &= -4/9 \end{cases}$$

så att $a = -2$. 3.0p

(b) Faktorisera $f(z)$ i reella polynom av så låg grad som möjligt:

$$f(z) = (z + 2 + j)(z + 2 - j)(3z + c) = (z^2 + 4z + 5)(3z - 1).$$

1.0p

Alternativ lösning av uppgift 6.

6.
Givet punkterna $P_1 = (1; 2)$, $P_2 = (5; -1)$ och $P_3 = (4; 6)$. Byt till komplexa tal:

$$z_1 = 1 + 2j, \quad z_2 = 5 - j, \quad z_3 = 4 + 6j.$$

(a) Visa att sträckorna P_1P_2 och P_1P_3 är lika långa, d.v.s. att $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1|$ ...

$$|z_2 - z_1| = |4 - 3j| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5, \quad |z_3 - z_1| = |3 + 4j| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Vinkelräta...

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{3 + 4j}{4 - 3j} \cdot \frac{4 + 3j}{4 + 3j} = \frac{25j}{25} = j, \quad \arg(j) = \frac{\pi}{2} (= 90°).$$

2.0p

(b) Bestäm koordinaterna för det fjärde hörnet...
Det fjärde hörnet koordinater ges av

$$z_4 := z_1 + z_2 - z_1 + z_3 - z_1 = 8 + 3j \text{ alltså } P_4 = (8; 3)$$

eller med polära koordinater:

$$z_4 = z_1 + (z_2 - z_1)e^{j\,\pi/4}\sqrt{2} = 1 + 2j + (4 - 3j) \cdot (1 + j) = 1 + 2j + 7 + j = 8 + 3j, \quad P_4 = (8; 3).$$

2.0p