Lösningsförslag till Tentamen i Linjär algebra, 3.7 hp, LMA212 för DAI1 och DEI1, 20181101,08.30-12.30

tel 031 772 5892/0708 948 456. Lärare: Reimond Emanuelsson

Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare

1. Låt $z = \dfrac{11-j}{6+5j}$.

   (a) Förenkla...

   $$z = z = \frac{11-j}{6+5j} \cdot \frac{6-5j}{6-5j} = \frac{61-61j}{61} = 1-j.$$

   (b) Beräkna... $|z|?\sqrt{2}$. $\operatorname{Im} z = -1$. d) $\arg z = -\dfrac{\pi}{4}$.

   2.0p

2. Givet matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a)

   $$\det \boldsymbol{A} = 0.$$

   (b)

   $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ d.v.s. } \begin{array}{ccc} x & = & z-1 \\ y & = & 4-z \end{array}. \quad z \in \mathbb{R}$$

   1.0p+1.5p

   (c) Lös ekvationen

   $$\boldsymbol{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4p \\ 2p \\ p \end{bmatrix} \sim \begin{cases} x = z + 2p \\ y = p - z \end{cases}, \quad z \in \mathbb{R}$$

   1.5p

3. Givet matrisekvationen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, där $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$. 0.5p

   (a) Lös matrisekvationen med MK-metoden...

   $$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} =: \hat{\boldsymbol{x}}$$

   2.5p

   (b) Beräkna medelfelet:

   $$\boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b} = \ldots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0},$$

   d.v.s. medelfelet är 0. 1.0p

   (c) Visa att matrisen

   $$\boldsymbol{A}_L^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   och alltså $\boldsymbol{A}_L^{-1}$ är vänsterinvers. Lösning av mastriekvationen med denna matris ger samma lösning som med MK-metoden alltså

   $$\boldsymbol{A}_L^{-1} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \hat{\boldsymbol{x}}$$

   1.0p

   (d) $\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ är lösning till ursprunglig ekvation, som alltså har lösning. 0.5p

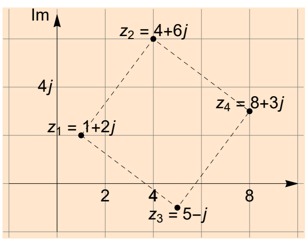
4. Punkterna $z_1 = 1 + 2j$, $z_2 = 4 + 6j$ och $z_3 = 5 - j$ är punkter i det komplexa talplanet.

   (a) sträckan mellan z_1 och z_2 har längd $|z_2 - z - 1[= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$och sträckan mellan z_1 och z_3 har längd $|4 - 3j| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$. Vinkelräta:

   $$\arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right) = \arg\left(\frac{3+4j}{4-3j}\right) = \arg j = \frac{\pi}{2}$$

   och alltså vinkelräta. 2.0p

   (b) Punkterna z_1, z_2 och z_3 utgör hörnen i en kvadrat (enligt a)). Koordinaterna för det fjärde hörnet $z_4 = z_3 + z_2 - z_1 = 8 + 3j$ i kvadraten.



2.0p

Man kan lösa denna uppgift 4 genom att gå över till "vanliga" koordinater i $\mathbb{R}^2$.

5. Punkterna $P_1 = (1; 2; 1)$, $P_2 = (4; 6; 1)$ och $P_3 = (5; -1; 1)$ är hörn i en kvadrat.

   (a) En normalvektor är $\boldsymbol{n} = (0, 0, 1)$ och en ekvation för planet Π, som innehåller punkterna ges av $z = 1$. 1.0p

   (b) Koordinaterna för det fjärde hörnet $P_4 = (8; 3; 1)$ enligt förra uppgiften, kvadraten. 1.5p

   (c) En femte punkt $P_5 = (x; y; 4)$ är given. Avståndet mellan punkten och planet i (a) är $4 - 1 = 3$. 1.0p

   (d) Pyramidens volym är

$$V = \frac{5^2 \cdot 3}{3} = 25 \text{ v.e.}$$

   Man kan lösa denna uppgift 5 m.h.a. uppgift 4. 1.5p

6. Betrakta polynomet $f(z) = 3z^2 + (5 + 3j)z - (2 + j)$.

   (a) Lös ekvationen

$$f(z) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} z_1 & = 1/3 \\ z_2 & = -2 - j \end{cases}$$

   3.0p

   (b) Faktorisering $f(z)$ i komplexa polynom av så låg grad som möjligt:

$$f(z) = (z + 2 + j)(3z - 1)$$

   1.0p

7. Betrakta binomet $g(z) = z^3 + 64j$.

   (a)

$$g(z) = z^3 + 64j = 0 \Longrightarrow r^3 e^{3j\theta} = 64e^{3j\pi/2} \Longrightarrow \begin{cases} r^3 = 64 \\ 3\theta = 3\pi/2 + 2\pi n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} r = 4 \\ \theta = \pi/2 + 2\pi n/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = -1,\ \theta = -\pi/6,\ z_1 = 2\sqrt{3} - 2j \\ n = 0,\ \theta = \dfrac{\pi}{2},\ z_2 = 4j \\ n = 1,\ \theta = 7\pi/6,\ z_3 = -2\sqrt{3} - 2j \end{cases}$$

   2.0p

   (b) Faktorisera...

$$g(z) = (z - 2\sqrt{3} + 2j)(z - 4j)(z + 2\sqrt{3} + 2j)$$

   1.0p