Lösningsförslag till Dugga 1 vid Chalmers tekniska högskola i matematik, kurskod LMA 212 0104, för DI1 och EI1, 8.00-10.00, 20181004

Examinator Reimond Emanuelsson, tel 031 772 5892, 0708 948456.
Maximal poäng 9.0 . Rond c:a 9.15.

1. Följande linjära ekvationssystem, ES, är på matrisform.
Ange rang på koefficient- och totalmatris, samt antal lösningar till respektive ES.

(a) $\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$, $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = 3, \quad \operatorname{rang} \boldsymbol{A}|\boldsymbol{B} = 4, \quad$ antal lösn. $= 0$

(b) $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$

Sista raden: $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 = 1.$, Antal lösn. $= 0$, $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = 2$, $\operatorname{rang} \boldsymbol{A}|\boldsymbol{B} = 3$

1.5p+1.5p

2. Antag att $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ och $\boldsymbol{C}$ är tre matriser med typ $\boldsymbol{A} = 2 \times 3$, typ $\boldsymbol{B} = 3 \times 5$ respektive typ $\boldsymbol{C} = 5 \times 2$.

(a) Matrismultiplikationer av matriser två och två av ovanstående matriser är möjliga är

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A}$$

1.0p

(b) Typerna på de matrismultiplikationer är

$$2 \times 5, \quad 3 \times 2, \quad 5 \times 3.$$

1.0p

3. Matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ har inversmatris $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -p & -p & q \\ 0 & 0 & p \\ q & p & -q \end{bmatrix}$ värdet på $p = 1$ värdet på $q = 2$. 1.0p

---

4. (a) Lös ut $\boldsymbol{X}$ i matrisekvationen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{X}$ ...

$$\Longleftrightarrow \mathbf{2}I \cdot \boldsymbol{X} - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = (2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \Longleftrightarrow \boldsymbol{X} = (2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{B}.$$

1.5p

(b) Visa att $\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I}) \cdot (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \ldots$.

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I}) \cdot (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \cdot (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{I}$$

och

$$(\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I}) \cdot (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I})[\boldsymbol{A}^{-1} \cdot (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})]^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I})[\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I}]^{-1} = \boldsymbol{I}.$$

Alternativt:

$$(\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I}) \cdot (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}) \cdot (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \underbrace{(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}}_{= \boldsymbol{I}} = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

1.5p