Chalmers Tekniska Högskola

Lösningsförslag till Dugga 2 för DAI1 och EI1, LMA 212, 20181018, 13.00-15.00

1. Beräkna determinanterna... (a) $\det \boldsymbol{A} = 2018$, (b) $\det \boldsymbol{B} = -24$, (c) $\det \boldsymbol{C} = 0$, (d) $\det(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) = 0$. 4.0 p

2. Givet en kvadratisk matris $\boldsymbol{A}$. Ange värdet av $\det \boldsymbol{A}'$ uttryckt i $\det \boldsymbol{A}$, där matrisen $\boldsymbol{A}'$ erhålls genom radoperationerna R1 - R3...

   a) $\det \boldsymbol{A}' = \det \boldsymbol{A}$

   b) $\det \boldsymbol{A}' = -\det \boldsymbol{A}$

   c) $\det \boldsymbol{A}' = c \det \boldsymbol{A}$ 3.0 p

3. Identiteter: (a), (b), (c), (d), (e). Ej identitet: (f).

(a) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$	(b) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$	(c) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$
(d) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$	(e) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$	(f) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \lvert \boldsymbol{a} \rvert^2$

3.0 p

4. Givet fyra punkter P, Q, R och S i $\mathbb{R}^3$...

   (a) arean T av triangeln med hörn i P, Q och R är $T = \dfrac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{2}$. 1.0 p

   (b) Volymen av tetraedern med hörn i de fyra punkterna är $V = \dfrac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PS}|}{6}$ 2.0 p

5. Låt $\boldsymbol{A}$ vara en matris av typ $n \times n$.

   (a) Bevisa att om $\boldsymbol{A}$ har invers ...

   $$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \Longrightarrow \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} \equiv \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{X} \equiv \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B}.$$

   D.v.s. lösningen är $\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B}$. $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ den entydiga lösningen $\boldsymbol{X}$. 1.5 p

   (b) Bevisa att $\boldsymbol{A}$ har invers... Det är innebär att

   $$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I} \text{ som ger } \det(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}) = \det \boldsymbol{A} \cdot \det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \det \boldsymbol{I} = 1.$$

   Att produkten är $1 \neq 0$ visar att faktorn $\det \boldsymbol{A} \neq 0$. 1.5 p