Lösningsförsag till Dugga/Baskunskapstentamen vid Chalmers tekniska högskola i Linjär algebra (matematik), kurskod LMA 212, för DI och EI, måndag e.m. 20190107

1.

(a) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$

(b) 3×4 $\quad 1\times 2$ $\quad 1\times 4$

1.0p

2. Följande matris är ett ekvationssytem på matrisform i variablerna x, y, z, och u. 1.0p

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

(a) rang på koefficientmatris $= 3 =$ rang totalmatris. 1.0p

(b) Lös ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x = 3t+2 \\ y = -2t \qquad t\in\mathbb{R} \\ z = 3 \end{cases}$$

1.5p

3. Givet matrisekvationen

$$\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} - 2\boldsymbol{X}\,.$$

(a) Lös ut matrisen $\boldsymbol{X}$...

$$\boldsymbol{X} = B\cdot(2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}$$

2.0p

(b)

$\operatorname{typ}\boldsymbol{A} = m\times 3$, $\quad\operatorname{typ}\boldsymbol{B} = 2\times p$, $\quad p = 3$, $\quad\operatorname{typ}\boldsymbol{X} = 2\times 3 = \operatorname{typ}\boldsymbol{B}$, $\quad\operatorname{typ}\boldsymbol{A} = 3\times 3$.

1.5p

4. Antag att för matrisen $\boldsymbol{A}$ är $\operatorname{typ}\boldsymbol{A} = 3\times 3$ och att matrisekvationen $\boldsymbol{x}$: $\quad\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har lösningen

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}_0$$

(a) $\det\boldsymbol{A} = 0$ eftersom matrisekvationen har ∞ med lösningar. 2.0p

(b) $\operatorname{rang}\boldsymbol{A} = 2$ eftersom det finns en (1) fri variabel. 2.0p

5. (a) Beräkna...

$$|\boldsymbol{A}^T| = |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} \\ 0 & a_{2\,2} & a_{2\,3} \\ 0 & a_{3\,2} & a_{3\,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2})$$

(b) Beräkna...

$$|2\boldsymbol{A}| = 8a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2})$$

2.0p, 2.0p

6. Vektorerna $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är vinkelräta vektorer i $\mathbb{R}^3$ båda med samma längd 3.

(a) $\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = 0$, ett tal. 1.0p

(b) $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$, en vektor. 2.0p

(c)

$$|\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})| = |\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}| = 3^3 = 27,$$

ett tal. 2.0p

7. Antag att $\boldsymbol{A}$ är en kvadratisk matris.

(a) Antag att $\boldsymbol{A}$ är en inverterbar matris.

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \Longrightarrow \boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} \equiv \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{X} \equiv \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{B}$$

d.v.s., om matrisekvationen har lösning s är den entydig. Insättning av $\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{B}$, som $\boldsymbol{X}$ i ekvationen $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ ger VL$=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}=$HL. Alltså existerar det en lösning.

(b) Antag att matrisekvationen $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ har entydig lösning $\boldsymbol{X}$ för varje $\boldsymbol{B}$. Visa att $\boldsymbol{A}$ har invers matris: Betrakta matrisekvationen $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$, d.v.s. HL$=\boldsymbol{I}$. Således är $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{B}$.

4.0p