LMA212

1 Föreläsning I

1.1 Linjärt ekvationssystem, Lay 1.1, 1.2, 1.4

Ex 1.1 *Ett linjärt ekvationssystem* (ES) är ex.vis

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Vi skall tillåta oss ett antal *radoperationer* för att lösa ett ES.

Lösning:

I detta exempel, först operation R2, radbyte och sedan operation R1, multiplikation av en (i detta fall,första) ekvation som sedan adderas till andra ekvation.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 3 \cdot (-2) \\ 2x + y - 2x - 2y = 1 = -5 \end{cases} \downarrow$$

Och nu multiplikation av andra ekvation med ett tal $\neq 0$, operation E3, närmare bestämt -1, som ger

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 3 \\ (y = 5) \cdot (-1) \uparrow \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$$

Dessa tre operationerna räcker för att lösa alla typer av ES. Metoden kallas *Eliminationsmetoden.*

Ex 1.2 Lös ES...

Lösning:

$$\begin{cases} (2x + y = 1) \cdot (-2) \downarrow \\ 4x + 2y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Den sista ekvationen är $0 = 1$, en orimlighet. Detta betyder att ES saknar lösning, alternativt att antal lösningar är 0.

Ex 1.3 Lös ES...

Lösning:

$$\begin{cases}(2x+y=1)\cdot(-2)\downarrow\\ 4x+2y=2\end{cases} \iff \begin{cases}2x+y=1\\ 0=0\end{cases}$$

Den sista ekvationen är $0 = 0$, är sann för alla (x, y) och ger ingen information. Således är

$$\begin{cases}(2x+y=1)\cdot(-2)\downarrow\\ 4x+2y=2\end{cases} \iff 2x+y=1$$

en ekvation med oändligt många lösningar. Svar: x, y som uppfyller detta ES ges av $\{(x, y);\ y = 1 - 2x,\ x \in \mathbb{R}\}$.

- Det som dessa exempel är typiskt för ES i allmänhet. Antal lösningar till ett ES är 1, 0 eller ∞.

1.2 ES på matrisform

Vi rationaliserar skrivandet av ett ES och skriver exemplen ovan med matris. I det första exemplet skriver vi upp bara det nödvändigaste.

> Vi använder de tre **Radoperationerna** (Eliminationsmetoden, Eng: Row Reduction Algorithm)
>
> **R1** Multiplikation av en rad med ett tal, som sedan adderas till en annan rad.
>
> **R2** Radbyte.
>
> **R3** Multiplikation av en rad med ett tal $\neq 0$.

$$\left[\begin{array}{cc|c}2&1&1\\1&1&3\end{array}\right] \sim \{\text{R2}\} \sim \left[\begin{array}{cc|c}1&1&3\\2&1&1\end{array}\right] \sim \{\text{R1}\} \sim \left[\begin{array}{cc|c}1&1&3\\0&-1&-5\end{array}\right] \cdot(-1) \sim$$

$$\sim \{\text{R3}\} \sim \left[\begin{array}{cc|c}1&1&3\\0&1&5\end{array}\right] \cdot(-1)\uparrow \sim \left[\begin{array}{cc|c}1&0&-2\\0&1&5\end{array}\right], \text{ som betyder att } \begin{cases}x=-2\\ y=5\end{cases}.$$

Ex 1.4 Lös ES

$$\begin{cases}x-y+2z &= -1\\ 3x+z &= 1\\ x+y-z &= 2\end{cases}$$

Lösning:

På matrisform

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] (*) \sim \{\text{med samma typ av operationer}\} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] (**)$$

Från $(**)$ går vi vidare till

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] (***)$$

Kommentarer

- Vi har använt den den *tredje* radoperationen R3 på rad 2 vid $(**)$, muliplikation med $c = 1/3$:

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \cdot(1/3) \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

- Betrakta matrisen i föregående exempel

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \tag{1}$$

1. Matrisen har tre rader (den första är $[1 \; -1 \quad 2 \,|\, -1]$) och fyra kolonner (den första är $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$).
2. Matrisen i (1) är av typ 3×4, enligt föregående punkt.
   Observera att varje rad har 4 (fyra) element och att varje kolonn har 3 (tre) element:

Antal rader = antal element i en kolonn. Antal kolonner = antal element i en rad.

3. Matrisen $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \mathbf{3} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ är av typ 3×3 eller ordning 3. Den är *kvadratisk*. Den är även *koefficientmatris* till motsvarande ES.

4. Matrisen i (1) är *totalmatris* (augmented matrix) för motsvarande ES.
5. Elementet **3** är i position $(2,1)$ (rad 2 och kolonn 1).

---

6. Att

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

läses att vänster matris är *radekvivalent* med höger matris.

7. Lösningen är $(x, y, z) = (0, 3, 1)$.

(*) Det första elementet, räknat från vänster i en rad som är $\neq 0$, kallas *pivotelement.* I (1) är dessa $1, 3$ och 1.

(**) I denna är pivotelementen också $1, 3$ och 1. Pivotelementet i raden ovan står t.v. om pivotelementet i raden under. Eventuella rader med enbart 0 som element kallas en *nollrad.* Dessa skall stå nederst. Den sista matrisen har *trappstegsform* (echelon form).

(***) Denna matris är också på trappstegsform. Dessutom är alla tre pivotelement $= 1$ och alla andra element i samma kolonn, som har pivotlement, är $= 0$. Matrisen är då på *radreducerad form* (Row reduced echelon form).

Sats 1.1 Varje matris är radekvivalent med en matris på trappstegsform och t.o.m. med en matris på radreducerad form.

Förutom de införda begreppen ovan definierar vi *rang.*

Definition 1.1 Givet en matris $\boldsymbol{A}$ och en radekvivalent matris $\boldsymbol{A}'$ på trappstegsform, d.v.s. $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}'$.
Antal pivotelement i $\boldsymbol{A}'$ kallas rangen för $\boldsymbol{A}$ och skrivs $\operatorname{rang} \boldsymbol{A}$.

Kommentarer

Ex 1.1 Vi sätter koefficientmatrisen till $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och totalmatrisen till $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B} = \left[\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$ I ex 1.1 ser vi att

$$\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B} = \left[\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \boldsymbol{A}|\boldsymbol{B} = \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Observera att $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = \operatorname{rang}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = 2$ =antal variabler.
Antal lösningar är 1.

Ex 1.2 Här är $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = 1 < \operatorname{rang}\big(A|\boldsymbol{B}) = 2$.
Antal lösningar är 0.

Ex 1.3 Här är $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = 1 = \operatorname{rang}\big(A|\boldsymbol{B}) = 1$ <antal variabler.
Antal lösningar är ∞.

- I ex 1.1 är rangen för koefficientmatrisen lika med antal pivotelement i motsvarande matris på trappstegsform. Man säger att en variabel som motsvarar ett pivotelement i en matris på trappstegsform är *bunden*.
- I ex. 1.3 har vi $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B} \sim 2x + y = 1$. Här är talet 2 pivotelementet, x bunden variabel och y fri variabel.

1.2.1 Samband, rang och antal lösningar på ett ES

					Antal lösningar
rang koeff. matris	$=$	rang totalmatris	$=$	antal variabler	1
rang koeff. matris	$=$	rang totalmatris	$<$	antal variabler	∞
rang koeff. matris	$>$	rang totalmatris			0

Ex 1.5 Lös ES på matrisform. Variabler är x, y, z.

Lösning:

Vi förväntar oss 1, 0 eller ∞ många lösningar.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right].$$

Detta betyder att $(x, y, z) = (4, 6, 5)$.

Kommentarer

Vi ser hur sambanden vi redan kommit fram till även stämmer på detta exempel.

- $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = \operatorname{rang} \boldsymbol{A}|\boldsymbol{B} = 3$ =antal variabler. Alltså 1 lösning.

Ex 1.6 Lös ES på matrisform. Variabler är x, y, z.

Lösning:

Vi förväntar oss 1, 0 eller ∞ många lösningar.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & -4 \end{array}\right].$$

Observera att den sista totalmatrisen är på redreducerad form. Rang för koefficient- och totalmatris är 2 <antal variabler. Alltså ∞ med lösningar. Det finns två bundna variabler, x och y och en fri z. De bundna variablerna motsvarar pivotelementen. Att det finns en (eller flera) fria variabler, betyder att det finns ∞ med lösningar. Vi kan uttrycka lösningarna i den fria variabeln.

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t - 4 \\ z = t, \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Kommentarer

- Lösningen är grafiskt, en linje i $\mathbb{R}^3$.
- t, som motsvarar den fria variabeln, kallas *parameter*.
- Med fler variabler än ekvationer (villkor) kallas ES för *underbestämt*.

Ex 1.7 Lös ES

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ x + 2y = 9 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

Lösning:

Detta är ett överbestämt ES. Sådana brukar sakna lösningar. På matrisform blir det

$$\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & 6 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vi ser att $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = \operatorname{rang}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = 2$ =antal variabler. Alltså en lösning som ju är $(x, y) = (7, 1)$.

Kommentarer

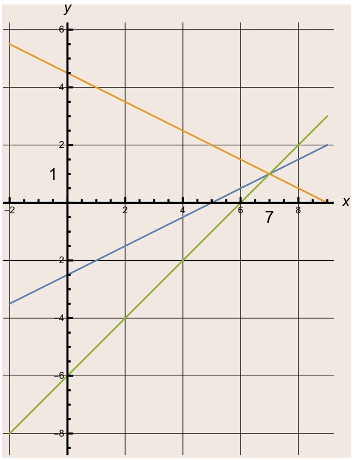
- Speciellt ser vi att vi får en nollrad i både koefficient- och totalmatrisen.

1.2.2 Grafisk tolkning av ES och lösningarna

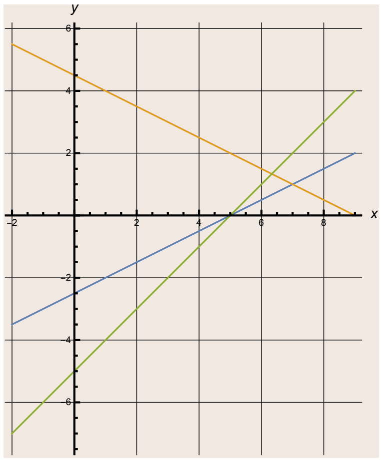
I de fall där vi har två variabler, som i de sista exemplet, kan vi tolka ekvationerna grafiskt som linjer i planet ($\mathbb{R}^2$):

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ x + 2y = 9 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

Lösningen i detta exempel är $(x_0; y_0) = (7; 1)$, som är gemensam skärningspunkt för de tre linjerna. Oftast är det noll lösningar på ett överbestämt ES: Tre eller fler linjer brukar inte skära varandra i en punkt.



Tre linjer som skär varandra.



Tre linjer som inte skär varandra.

1.3 Ett exempel elläran

Ex 1.8 I detta exempel är det V_1, V_2, V_3, och V_4 som är variabler/obekanta. För en strömkrets gäller följande ekvationer:

$$\begin{cases} \frac{V_1-E}{R_1} + \frac{V_1}{R_2} + \frac{V_1-V_2}{R_3} & = 0 \\ \frac{V_2-V_1}{R_3} + \frac{V_2}{R_4} + \frac{V_1-V_3}{R_5} & = 0 \\ \frac{V_3-V_2}{R_5} + \frac{V_3}{R_6} + \frac{V_3-V_4}{R_7} & = 0 \\ \frac{V_4-V_3}{R_7} + \frac{V_4}{R_8} & = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} (\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3})V_1 - \frac{1}{R_3}V_2 & = \frac{1}{R_1}\,E \\ -\frac{1}{R_1}\,V_1 + (\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5})V_2 - \frac{1}{R_5}\,V_3 & = 0 \\ -\frac{1}{R_5}\,V_2 + (\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7})V_3 - \frac{1}{R_7}\,V_4 & = 0 \\ -\frac{1}{R_7}\,V_3 + (\frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8})V_4 & = 0 \end{cases}$$

Med värden på resistanserna och spänningen

$$\begin{cases} R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = \\ R_5 = R_6 = R_7 = R_8 = 0.5\,\Omega \\ E = 10 \text{ V} \end{cases}$$

kan ES ovan skrivas

$$\begin{aligned} 6V_1 - 2V_2 &= 20 \\ -2V_1 + 6V_2 - 2V_3 &= 0 \\ -2V_2 + 6V_3 - 2V_4 &= 0 \\ -2V_3 + 4V_4 &= 0 \end{aligned}$$

Och på matrisform

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 6 & -2 & 0 & 0 & 20 \\ -2 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{65}{17} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{25}{17} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{10}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{17} \end{array}\right]$$

Att ta fram den radreducerade formen är tekniskt svårt och ovan demonstreras bara att det är möjligt. Spänningarna är alltså

$$V_1 = 65/17, \quad V_2 = 25/17, \quad V_3 = 10/17, \quad V_4 = 5/17 \quad \text{(V)}.$$

Kommentarer

- Speciellt har detta ES en entydig (d.v.s. *en*) lösning och den kvadratiska koefficientmatrisen *och* totalmatrisen har rangen 4.
- Med ett program som kan *lösa* detta ES exakt får man inga avrundningfel i mellanled. Man behöver inte ge svaret exakt utan endast ge ett (således korrekt) avrundat svar:

$$V_1 = 3.82, \quad V_2 = 1.47, \quad V_3 = 0.59, \quad V_4 = 0.29 \quad \text{(V)}.$$

- I själva verket är de ingående värdena, oftast, numeriska värden, d.v.s. givna som decimaltal. Då ger ett matematiskt program direkt en numerisk lösning.

Ex 1.9 Givet ett ES i ex 1.1 med koefficientmatrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och totalmatrisen till $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$. Vi har *en* lösning. Det är det naturliga när man har lika många ekvationer som variabler.
I ex1.2 har vi koefficientmatris och HL

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ respektive } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vi ser att raderna i koefficientmatrisen $\boldsymbol{A}$ är proportionella, mer exakt så är

$$2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 0.$$

Vi observerar att i ex 1.3 är koefficientmatrisen densamma och där finns ∞ med lösningar. Till sist i ex 1.1 är motsvarande beräkning $2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$.

Definition 1.2 *Determinanten* av en matris

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

av ordning 2 är

$$\det \boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}| = ad - bc.$$

1.4 Antal lösningar till ett ES, invers matris och determinant

Vi ugrå från ett ES med den kvadratiska (koefficient-)matrisen och högerledet

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$