1 Föreläsning II

1.1 (Definition av matris)

En matris är ett rektangulärt schema med element, i varje position.
Två matriser är lika om elementen i varje position är lika.

1.2 Matrisoperationer och matrisekvation (Lay 1.4, 2.1 och 2.2)

Regler för matris-operationer se avsnitt 2.1 sidan 115.

- Multiplikation av en matris med ett reellt (komplext) tal sker elementvis.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix} \Longrightarrow c \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} ca_{1,1} & ca_{1,2} & ca_{1,3} \\ ca_{2,1} & ca_{2,2} & ca_{2,3} \end{bmatrix}.$$

- Addition av två matriser kräver att de är av samma typ. Additionen sker då elementvis. Med

$$\text{Med } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{bmatrix}$$

  är

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & a_{1,3} + b_{1,3} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & a_{2,3} + b_{2,3} \end{bmatrix}.$$

  - Det finns en *nollmatris* för varje typ av matris. Ex.vis av typ 2×3 är den $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ med egenskapen $\boldsymbol{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$.
  - För varje matris $\boldsymbol{A}$ finns matrisen $-\boldsymbol{A}$, som innebär teckenändring av sasmtlig element i $\boldsymbol{A}$. Det är klart att $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} = \mathbf{0}$.
  - Observera att kommutativa lagen inte finns med på sidan 115 (och den gäller inte).

- För multiplikation mellan två matriser börjar vi med $\boldsymbol{A} = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}]$ och $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$ och multiplikationen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ är möjlig ty antal kolonner i $\boldsymbol{A}$ =antal rader i B. Obs! Detta betyder att raden i $\boldsymbol{A}$ har lika många element som kolonnen i $\boldsymbol{B}$ $(= 3)$. Produkten är

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}.$$

Sammanfattningsvis är

$$\operatorname{typ} \boldsymbol{A} = 1 \times 3, \quad \operatorname{typ} \boldsymbol{B} = 3 \times 1 \text{ och } 3 = 3.$$

Produkten blir ett tal eller en matris av typ 1×1 eller ett element, skrivet utan "[ ]".

- I föregående föreläsning I (ex 1.1) har vi en koefficientmatris $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Sätt $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, som matrisen med variablerna. Multiplikationen
$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ x + y \end{bmatrix}$$
en matris av typ 2×1. HL i samma exempel skall vi också se som en matris,
$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$
Sammantaget kan detta ES skrivas som en *matrisekvation:*
$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}.$$
I nästa exempel (ex 1.2)är koefficientmatrisen
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ och motsvarande ES } \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}.$$

- Matrismultiplikation på riktigt: Om vänster matris $\boldsymbol{A}$ har lika många element i en rad, som höger matris har element i en kolonn matris, så är $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ definierad, mer exakt, om $\operatorname{typ} \boldsymbol{A} = m \times n$ så måste $\operatorname{typ} \boldsymbol{B} = n \times p$, för några m, n, och p.
$$\underset{m \times n \cdot n \times p}{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}} = \underset{m \times p}{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}},$$
där elementet i position (i, k) är produkten av rad i i $\boldsymbol{A}$ och kolonn k i $\boldsymbol{B}$.

Ex 1.1 Vi har tidigare löst nedanstående på matrisform. Variabler är x, y, z.

Lösning:

Vi förväntar oss 1, 0 eller ∞ många lösningar.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

Som matrisekvation blir det

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ex 1.2 I allmänhet är $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$, d.v.s. kommutativa lagen gäller inte. Låt $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Vilka matriser $\boldsymbol{A}$ kommuterar med $\boldsymbol{B}$?

Lösning:

Det betyder att $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$. Då måste $\text{typ}\,\boldsymbol{A} = 2 \times 2$ (Verifiera!). Sätt $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Det ger

$$\begin{bmatrix} a+b & 2b-a \\ c+d & 2d-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c & b-d \\ a+2c & b+2d \end{bmatrix}$$

Likhet mellan två matriser betyder att de är av samma typ och elementvis likhet råder. Det ger ett ES i $a, \underline{,} c$ och d. Ekvivalent får vi att

$$\begin{bmatrix} b+c & -a+b+d \\ -a-c+d & -b-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} b+c=0 \\ -a+b+d=0 \\ -a-c+d=0 \\ -b-c=0 \end{cases}.$$

Det sista ES kan ekvivalent skrivas

$$\begin{cases} b+c=0 \\ -a+b+d=0 \\ -a-c+d=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-c \\ d=a-b \end{cases}.$$

Det betyder att

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{bmatrix}$$

Kommentarer

- Frågan hur vi kan få lösningen $(x, y, z) = (4, 6, 5)$ m.h.a. matrisekvationen i föregående exempel.
- Vi kommer att ha användning av transponatet av en matris. Det är samma matris men med rad och kolonn byter plats.

Ex: med $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ är transponatet

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Och mer allmänt (ty två transponat tar ut varandra, se nedan.)

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix}$$

I ett tidigare exempel har vi $\boldsymbol{A}$ som koefficientmatris. Motsvarande ES kan skrivas som en matrisekvation

$$\boldsymbol{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Vi kan lika gärna skriva detta med motsvarande transponatmatriser: Först VL.

$$\boldsymbol{X}^T \cdot \boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 6 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}^T.$$

Vi kan enkelt verifiera detta.

Räkneregler för transponat

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B})^T &= \boldsymbol{A}^T \pm \boldsymbol{B}^T \\ (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^T &= \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{A}^T \\ (\boldsymbol{A}^T)^T &= \boldsymbol{A} \end{aligned}$$

Vi verifierar nu att typerna är desamma i VL och HL i andra identiteten. Obervera att i den andra identiteten är typ $\boldsymbol{A} = m \times n$ och typ $\boldsymbol{B} = n \times p$ för att $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ skall fungera. Typen för VL ges av följande: typ $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = m \times p$, så att typ $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^T = p \times m$.
Typen för HL skall vara densamma och ges av

$$\operatorname{typ} \boldsymbol{B}^T = p{\times}n, \quad \operatorname{typ} \boldsymbol{A}^T = n{\times}m \Longrightarrow \operatorname{typ} (\boldsymbol{B}^T{\cdot}\boldsymbol{A}^T) = p{\times}n{\cdot}n{\times}m = p{\times}m.$$

Räkneregler, se sidan 117 i Lay.

- Vi säger att en matris $\boldsymbol{A}$ är symmetrisk, om $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$. Antag att typ $\boldsymbol{A} = m \times n$. Då är typ $\boldsymbol{A}^T = n \times m$. Alltså måste $m = n$, d.v.s. $\boldsymbol{A}$ måste vara kvadratisk.

Ex 1.3 Låt $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & b \\ 1 & c \end{bmatrix}$. Bestäm b och c så att $\boldsymbol{A}$ blir symmetrisk.

Lösning:

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ b & c \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & b \\ 1 & c \end{bmatrix}$$

betyder ju elementvis likhet. Alltså är

$$\begin{cases} 2 = 2 \\ 1 = b \\ b = 1 \\ c = c \end{cases} \quad \text{d.v.s. } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & c \end{bmatrix}, \quad c \text{ godtyckligt.}$$

Enhetsmatris Bland matriser finns en ”etta”, en *identitetsmatris* $\boldsymbol{I}$ av olika ordningar sådan att

$$\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}.$$

Dessa är

$$\boldsymbol{I}_1 = [1], \quad \boldsymbol{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ etc}$$

Ex 1.4 Bestäm identitetsmatriser för $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix}$.

Lösning:

för multiplikation från vänster måste $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_2$ och för multiplikation från höger måste $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_3$.

Invers matris

- För en reell ekvation $x: \quad ax = b$ multiplicerar man med a^{-1} om a^{-1} existerar:
$$ax = b \Longleftrightarrow x = a^{-1} \cdot b = \frac{b}{a}.$$
- För varje reellt tal a finns talet 1, sådant att $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.
- För varje reellt tal $a \neq 0$ finns $1/a$ sådant att $1/a \cdot a = a \cdot 1/a = 1$.
- För varje matris $\boldsymbol{A}$ finns en matris $\boldsymbol{I}$ (enhets- eller identitetsmatris), sådan att
$$\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}.$$
Den finns för alla ordningar $n = 1, 2, \ldots$. För
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
är
$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Vi verifierar att $\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}$.