1 Föreläsning III

Transponat- och symmetrisk matris

Definition 1.1 Givet matrisen $\boldsymbol{A} = (a_{jk})_{m\times n}$, med element a_{jk} i position (j,k).
Transponatet (transponatmatrisen) $\boldsymbol{A}^T$ är matrisen av typ $n \times m$ med element a_{jk} i position (k,j).

Ex 1.1 Matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ är inte symmetrtisk (även om den är kvadratisk). Man ser det ty ex.vis $a_{12} = -1 \neq a_{21} = 1$. Däremot är $\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A}$ symmetrisk. Vi ser det genom direkt beräkning av matrisen.

$$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -6 \\ -1 & -6 & 10 \end{bmatrix}$$

Definition 1.2 En matris är symmerisk omm $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$.

Sats 1.1

1. En symmetrisk maris är kvadratisk, d.v.s. $m = n$.
2. En matris $\boldsymbol{A} = (a_{jk})_{m\times n}$ är symmetrisk, om $a_{jk} = a_{kj}$, $j = 1, 2, \ldots, m$ och $k = 1, 2, \ldots, n$.
3. $\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A}$ är symmetrisk.

Vektoraspekt på en $m \times 1-$matris

Ex 1.2 Givet matrismultiplikationen

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

som utskrivet kan skrivas

$$\begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ 3x_3 - 2x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + x_3\boldsymbol{v}_3.$$

$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ och $\boldsymbol{v}_3$ är *vektorer.*

- Även $x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + x_3\boldsymbol{v}_3$ är en vektor, som är en *linjärkombination* av $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ och $\boldsymbol{v}_3$. För en fjärde vektor, $\boldsymbol{B}^T = [2 \quad -1 \quad 3]^T$, finns x_1, x_2, x_3
sådana att $\boldsymbol{B} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + x_3\boldsymbol{v}_3$? Detta är detsamma som att fråga sig om det finns ett $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ sådant att
$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}.$$
Denna matrisekvation motsvarar ES i exempel 1.5, föreläsning I. Lösningen är $\boldsymbol{X}^T = [4 \quad 6 \quad 5]$.

Kommentarer

- Lösningen existerar och är entydig.
- Vektorerna $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ och $\boldsymbol{v}_3$ är vektorer i $\mathbb{R}^3$, liksom $\boldsymbol{B}$.
- I själva verket finns entydig lösning $\boldsymbol{X}$ för *varje* HL (vektor) $\boldsymbol{B}$.
- Detta hänger ihop med att $\boldsymbol{A}$ har invers, se längre fram.
- Vektorerna $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ och $\boldsymbol{v}_3$ utgör tillsammans en bas för $\mathbb{R}^3$.
- En bas är också $\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = [1 \quad 0 \quad 0]^T \\ \boldsymbol{e}_2 = [0 \quad 1 \quad 0]^T \\ \boldsymbol{e}_3 = [0 \quad 0 \quad 1]^T \end{cases}$.

Fri och bunden variabel

Ex 1.3 Ett ES på matrisform med variablerna x_1, x_2, x_3 och x_4
$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right]$$
är på trappstagsform. De som räknas om bundna variabler är de som motsvarar pivotelement, d.v.s. x_1 och x_3. De andra är fria. På radreducerad form får vi
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$
För att slippa bråktal, kan vi inför parametrar för de fria variablerna på följande sätt:
$$x_2 = s, \quad x_4 = 3t.$$
Första och andra ekvationen kan då skrivas
$$\begin{cases} x_1 - s + 7/3 \cdot 3t = 2/3 \iff x_1 = s + 7t + 2/3, \text{ respektive} \\ x_3 + 1/3\, x_4 = 5/3 \iff x_3 = -t + 5/3. \end{cases}, \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$
(Lösningen är ett hyperplan av dimension 2 i $\mathbb{R}^4$.)

Invers matris

Vi har tidigare beräknat inversen av en matris av ordning 2 (typ 2×2) med *komplementmetoden.*

Ex 1.4 Betrakta ES med koefficientmatris $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ och HL= $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ =: $\boldsymbol{B}_1$, samma ES som i ex 1.5 i föreläsning I. Vi sätter $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_1 = [x_{11} \quad x_{21} \quad x_{31}]^T$, en okänd matris av typ 3×1. Lösningen är, enligt samma exempel

$$\boldsymbol{X}_1 = [x_{11} \quad x_{21} \quad x_{31}]^T = [4 \quad 6 \quad 5]^T.$$

Med ES på matrisform får vi alltså

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}_1] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right].$$

Observera att HL i den sista matrisen *är* $\boldsymbol{X}_1$.

Vi löser nu ett liknande ES, med HL $\boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$, m.h.a. matrisform och sätter den obekanta matrisen till

$$\boldsymbol{X}_2 = [x_{12} \quad x_{22} \quad x_{32}]^T.$$

Vi observerar att vi redan har löst detta ES med HL= $\boldsymbol{B}_1$. Således får vi återigen *en* lösning. Dessutom blir $\boldsymbol{A}$ återigen radekvivalent med $\boldsymbol{I}_3$.

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}_2] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Således är $\boldsymbol{X}_2 = [x_{12} \quad x_{22} \quad x_{32}]^T = [0 \quad 3 \quad 1]$. Vi skulle kunna skriva detta som

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 = x_{12} \\ 0 & 1 & 0 & 3 = x_{22} \\ 0 & 0 & 1 & 1 = x_{32} \end{array}\right].$$

Ex 1.5 Lösningen av det förra ES och detta ES görs med samma radoperationer och ger samma koefficientmatris $\boldsymbol{I}_3$ på radreducerad form. Alltså kan vi lösa båda ES samtidigt. Som matrisekvation och matrisform har vi alltså

$$\boldsymbol{A} \cdot [\boldsymbol{X}_1\, \boldsymbol{X}_2] = [\boldsymbol{B}_1\, \boldsymbol{B}_2] \text{ respektive } [\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}_1\, \boldsymbol{B}_2].$$

Matrisformen uppfyller radekvivalensen nedan.

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}_1\, \boldsymbol{B}_2] \sim \ldots \sim [\boldsymbol{I}|\boldsymbol{X}_1\, \boldsymbol{X}_2].$$

Invers matris för matriser av ordning 3 och högre

- Den metod som utvecklas nedan kallas *Jakobis metod.* Vi gör som det sista exemplet men för matrisekvationen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$, där $\boldsymbol{A}$ är kvadratisk av ordning 3 (typ 3×3). Utskrivet är

$$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{X}_1\, \boldsymbol{X}_2\, \boldsymbol{X}_3] = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{bmatrix}.$$

Vi utreder sambandet mellan $\boldsymbol{A}^{-1}$ och $\boldsymbol{X}$:
Vi vet, å ena sidan, att om $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$, så är $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$.
Å andra sidan, om $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$, multiplicera med $\boldsymbol{A}^{-1}$ *från vänster* i VL:

$$\boldsymbol{A}^{-1} \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}.$$

Och multiplicera *från vänster* i HL:

$$\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

Detta visar att $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

För att bestämma $\boldsymbol{X}$, som ju är $\boldsymbol{A}^{-1}$ i ekvationen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$, utnyttjar vi matrisform och eliminationsmetoden. Det är vad som görs i följande exempel.

Ex 1.6 Vi inverterar med $\boldsymbol{A}$ som ovan och förväntar oss att få $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_3$ i vänster matris.

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}] \sim \ldots \sim [\boldsymbol{I}|\boldsymbol{X}].$$

Då är $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$. Med siffror:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & -1 \end{array}\right]$$

Och den högra matrisen är $\boldsymbol{A}^{-1}$(!) Detta går att verifiera genom att multiplicera den med $\boldsymbol{A}$ från vänster elller höger och få $\boldsymbol{I}_3$.

Linearitets-egenskaperna för matris

Givet en matris $\boldsymbol{A} = (a_{jk})_{m\times n}$ och två matriser (vektorer) $\boldsymbol{X}$ och $\boldsymbol{Y}$ i $\mathbb{R}^n$.

Elementet i position (på plats) (j,k) i produkten $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X}$ är alltså

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n$$

och för $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{Y}$ är motsvarande element

$$a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + ... + a_{jn}y_n.$$

Och till sist motsvarande element i $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$ fås om x_j byts mot $x_j + y_j$, alltså

$$a_{ji}(x_1 + y_1) + a_{j2}(x_2 + y_2) + ... + a_{jn}(x_n + y_n) = \{\text{distr. lagen}\} =$$

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n + a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + ... + a_{jn}y_n$$

Vidrar slutsatsen att

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\,. \tag{1}$$

Detta är en av två lagar som kallas *linearitet.*
Låt c vara ett reellt tal. Med $c \cdot \boldsymbol{A}$ menas den matris som har element $c \cdot a_{jk}$, $j = 1, 2, ..., m$, $n = 1, 2, ..., n$, d.v.s. varje element multipliceras med c. Den andra är

$$c \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{A} \cdot (c \cdot \boldsymbol{X})\,. \tag{2}$$