1 Föreläsning IV

1.1 Matrisekvation

Ex: Ex 1.1

$$\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} = 2(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}^T)$$

är en matrisekvation, i den okäda matrisen $\boldsymbol{X}$. Antag att

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

(a) Vilken typ är $\boldsymbol{X}$?

(b) Lös matrisekvationen.

Lösning:

(a) $\operatorname{typ} \boldsymbol{B} = \operatorname{typ} \boldsymbol{X} = 2 \times 3$ och $\operatorname{typ} \boldsymbol{A} = 2 \times 2$.

(b) Lös matrisekvationen.

$$\boldsymbol{X} \cdot (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}) = 2\boldsymbol{B}^T \iff \boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{B}^T \cdot (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})^{-1}.$$

Med våra matriser är

$$\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

så att

$$\boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{B}^T \cdot (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})^{-1} = \begin{bmatrix} -26 & 4 & 10 \\ 38 & -6 & -12 \end{bmatrix}.$$

Ex 1.2 Betrakta matrisekvationen

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$

(a) Vilka typer är matriserna? Antag att $\boldsymbol{A}$ har 2 kolonner och $\boldsymbol{B}$ har 3 kolonner.

(b) Lös matrisekvationen m.a.p. $\boldsymbol{X}$. Antag att lämpliga matriser har invers.

Lösning:

(a) Vilka typer är matriserna? Antag att $\operatorname{typ} \boldsymbol{A} = 2 \times 2$ och $\boldsymbol{B} = \operatorname{typ} X = 2 \times 3$.

(b) Lös matrisekvationen...

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I})^{-1} \cdot \boldsymbol{B}.$$

1.2 Kombinatorik

- För att beräkna determinanten av matris av högre ordning, behövs permutationer av tal.

  Ex 1.3 Hur många permutationer finns det av mängden $\{1, 2, 3\}$?

  Lösning:

  Vi får det till $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 =: 3!$ (Läses tre-fakultet").

  Ex 1.4 $n!$ växer snabbt.

$$\begin{array}{rcr} 0! & = & 1 \\ 1! & = & 1 \\ 2! & = & 2 \\ 3! & = & 6 \\ 4! & = & 24 \\ 5! & = & 120 \\ 6! & = & 720 \\ 7! & = & 5040 \\ \vdots & & \vdots \\ 10! & = & 3\,628\,800 \\ 52! & \approx & 8 \cdot 10^{67} \end{array}$$

  Ex 1.5 Givet talen/talmängden $\{1, 2, 3\}$. Dess *kanoniska ordning* är $(1, 2, 3)$. Ordningen $(3, 1, 2)$ skall nu skrivas i kanonisk ordning genom att byta position på 3, 1 och 2. Detta kan göras på två sätt. Antingen "grannbyte"eller "(fjärr-)byte". Antalet sådana byten är antingen jämnt för båda sätten eller udda för båda sätten. Detta antal skrivs $\operatorname{inv}(3, 1, 2)$. Det viktig är om antalet är jämnte ller udda.

- Determinanten av $(a_{jk})_2$ är

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

  Vi ser att radindexen är i kanonisk ordning. Vi ser också att kolonnindexens ordningar är $(1, 2)$ och $(2, 1)$, samt att $\operatorname{inv}(1, 2) = 0$ och $\operatorname{inv}(2, 1) = 1$. Detta förklarar tecknena i

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- I derterminanten av en matris $(a_{jk})_{3\times 3}$, finns $3!$ termer av typ $\pm a_{1k_2}a_{2k_2}a_{3k_3}$, där $+$ och $-$ bestäms av antal inversioner av kolonnindexen (k_1, k_2, k_3).

  Ex 1.6 Beräkna antal inversioner av $(3, 2, 4, 1)$, $(2, 3, 4, 1)$ och $(3, 4, 2, 1)$.

  Lösning:

$$\begin{array}{lll|l} (3,2,4,1) & (3,2,1,4) & (1,2,3,4) & \operatorname{inv}(3,2,4,1) = 2 \\ (2,3,4,1) & (2,3,1,4) & (2,1,3,4) & \operatorname{inv}(1,2,3,4) = 2 \\ (3,4,2,1) & (1,4,2,3) & (1,2,4,3) & \\ (1,2,3,4) & & & \operatorname{inv}(3,4,2,1) = 3 \end{array}$$

  Ex 1.7 I $\det \boldsymbol{A}$, bestäm tecknet för termen $a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}$.

Lösning:

Enligt föregeående exempel är tecknet $+$, d.v.s. termen är $a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}$. P.s.s. men för $a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$. Enlig samma exempel är tecknet $-$, d.v.s. termen i $\det \boldsymbol{A}$ är $-a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$.