1 Föreläsning V

1.1 Mer om invers matris

Sats: Antag att $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$ är inverterbara matriser av samma ordning. Då är även $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ inverterar med invers $\boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$, (d.v.s. $\boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1}$).

Bevis:

Multiplikation från vänster:

$$(\boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}) \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot (\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}.$$

Multiplikation från höger lämnas som övning.

$\blacksquare$

Multiplikation och invers liknar multiplikation och transponat:

$$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{B}^T = (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A})^T.$$

Ex 1.1 Beräkna dels $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1}$ och dels $\boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$, där

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 & 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1) \\ (-2) \cdot 1 + 3 \cdot 2 & (-2) \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

med samma resultat.

1.2 Determinant del 2

Determinant

Definition 1.1

1. En permutation av $(1, 2, \dots, n)$ är en (om-)ordning av dessa tal.
2. Ordningen/permutationen $(1, 2, \dots, n)$ kallas den *kanoniska* ordningen.
3. För en permutation $(k_1, k_2, \dots, k_j, k_{j+1}, \dots, k_n)$ av talen $(1, 2, \dots, n)$ kallas ett (grann-)byte av plats av två intilliggande tal till $(k_1, k_2, \dots, k_{j+1}, k_j, \dots, k_n)$ en *inversion.*
4. Antal inversioner av $(k_1, k_2, \dots, k_j, k_{j+1}, \dots, k_n)$ betecknas $\mathrm{inv}(k_1, k_2, \dots, k_j, k_{j+1}, \dots, k_n)$.
5. Givet en reell matris $\boldsymbol{A} = (a_{jk})_{n\times n}$.
   Determinanten av $\boldsymbol{A}$ definieras som

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{\text{alla permutationer}} (-1)^{\mathrm{inv}(k_1,k_2,\dots,k_n)} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n} \tag{1}$$

Kommentarer

- Determinanten är summan över alla permutationer av $(1, 2, \dots, n)$. Dessa är $n!$.
- **Ett** (fjärr-)byte motsvaras av ett **udda** antal inversioner/grannbyten. Vi förklarar ett med ett exempel. Betrakta permutationen $(5, 2, 4, 3, 1)$. Vi fjärrbyter 1 och 5, alltså **ett** fjärrbyte och får $(1, 2, 4, 3, 5)$. Nu gör vi inversioner och räknar deras antal.
  Steg I: Flytta 1 till plats 1.

$$(5, 2, 4, 3, 1), (5, 2, 4, 1, 3), (5, 2, 1, 4, 3), (5, 1, 2, 4, 3), (1, 5, 2, 4, 3)$$

  d.v.s. 4 inversioner.

  Steg II: Flytta 5 till plats 5.

$$(1, 5, 2, 4, 3), (1, 2, 5, 4, 3), 1, 2, 4, 5, 3), 1, 2, 4, 3, 5)$$

  d.v.s. 3 inversioner.

  totalt $4 + 3 = 7$ inversioner:

$$\mathrm{inv}(5, 2, 4, 3, 1) = 4 + 3 = 7.$$

  Eftersom antal inversioner är udda omm antal fjärrbyten är 1, är tecknet $(-1)^{\mathrm{inv}(5,2,4,3,1)} = (-1)^7 = (-1)^1 = -1$.

- Determinanten av $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$ består av $3! = 6$ och är

$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}$.

- Vi ser att determinantens termer är produkten av tre element i $\boldsymbol{A}$ som är hämtade från *varje rad och kolonn*. Om en term innehåller faktorn $a_{1,1}$, så termen inte innehålla faktorer från samma rad och kolonn, alltså inte från rad 1 inte heller från kolonn 1. En annan faktor kan vara $a_{2,3}$ och således är den sista faktorn $a_{3,2}$. Sånär som tecken är termen $a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}$.
Tecknet ges av
$$(-1)^{\text{inv}(1,3,2)} = (-1)^1 = -1.$$
- Ovanstående resonemang tillämpad på matrisen, med nollor (0) under huvuddiagonalen
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{bmatrix} \text{ ger } \det \boldsymbol{A} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}.$$

Ex 1.2 Beräkna determinanten av
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Vi skall beräkna de 3! termerna (med rätt tecken).
$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{A} &= 2 \cdot 0 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot (-2) - \\ &\quad [0 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \cdot 3] = -1. \end{aligned}$$

- Vi skall nu se hur de tre radoperationerna påverkar determinanten. Om $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}'$, är då deras determinanter lika?
- Vi utför R1, R2 och R3 på nedanstående matris av ordning 2.

R1: Multiplicera rad 1 med c och lägg till andra rad:
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \sim \boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} + ca_{1,1} & a_{2,2} + ca_{1,2} \end{bmatrix}.$$
Och
$$\det \boldsymbol{A}' = a_{1,1}(a_{2,2}+ca_{1,2}) - a_{1,2}(a_{2,1}+ca_{1,1}) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} = \det \boldsymbol{A},$$
alltså ingen ändring av determinantens värde.

R2: Radbyte ger
$$\det \boldsymbol{A}' = \det \begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{1,1} & a_{1,2} \end{bmatrix} = -\det \boldsymbol{A},$$
alltså teckenändring på determinanten.

R3: Multiplikation av en rad, säg första rad, med ett tal $c \neq 0$ ger
$$\det \boldsymbol{A}' = c\,(a_{1,2}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}) = c \det \boldsymbol{A}.$$

Vi observerar att med $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}'$ gäller

$$\det \boldsymbol{A} \neq 0 \iff \det \boldsymbol{A}' \neq 0.$$

Obs!

$$c\,\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} ca_{1,1} & ca_{1,2} \\ ca_{2,1} & ca_{2,2} \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(c\,\boldsymbol{A}) = c^2 \det \boldsymbol{A}.$$

Ex 1.3 Beräkna Determinanten av matrisen $\boldsymbol{A}$ i ex 1.1 m.h.a. radoperationerna.

Lösning:

Det gäller bara att hålla reda på R2 och R3. R1 påverkar inte determinantens värde.

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{A} \quad &= \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \{\text{R2}\} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \{\text{R1}\} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \\ \{\text{R1}\} = &\quad - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = -1. \end{aligned}$$

- Determinanten av transponatet till $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$ får illustrera det allmänna fallet, d.v.s. determinanten för en matris av typ $n \times n$:

$$\det \boldsymbol{A}^T = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}.$$

Alltså

$$\det \boldsymbol{A}^T = \det \boldsymbol{A}. \tag{2}$$

- Speciellt för matris av ordning 3 kan determinanten beräknas med

Sarrus regel

Man skriver ut de två första kolonnerna t.h. om matrisen:

$$|\boldsymbol{A}| = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{array} \right. .$$

Termer som förses med **plustecken** är de som beräknas genom diagonaler i sydostlig riktning:

$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}$, $a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}$ och $a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}$.

Termer som förses med **minustecken** är de som beräknas genom diagonaler i sydvästlig riktning:
$-a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}$, $-a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}$ och $-a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}$.

Ex 1.4 Beräkna determinanten i ex 1.1 med Sarrus regel.

Lösning:

$$\det \boldsymbol{A} = \left| \begin{array}{rrr|rr} 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & -2 \end{array} \right| = 2 \cdot 0 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \cdot 2 +$$

$$-(0 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \cdot 3) = -(4 - 3) = -1.$$

Ex 1.5 Beräkna determinanten av $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Lösning:

Metod I Gör R1 för att få trappstegsform:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (-7) = -84.$$

Metod II Beräkna m.h.a. definitionen. Vi behöver bara beräkna två termer:

$$2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 3 - 5 \cdot 4) = -84.$$

Utvecklings-satsen

För att beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

kan vi ta och sortera efter de termer, som innehåller element från rad 1: $a_{1,1}$, $a_{1,2}$ och $a_{1,3}$ var för sig:

$$a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) + \quad -a_{1,2}(a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1}) + \quad a_{1,3}(a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1}).$$

Vi kan uppfatta $a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}$ som en underdeterminant, till $\boldsymbol{A}$. Vi ser också att vi har teckenaltering på de tre termerna, d.v.s. på den andra termen. Det är inte svårt att fˆrstå att den beror på indexen på $a_{1,1}$, $a1, 2$ och $a_{1,3}$. I själv verket är minustecknet på andra termen $-1 = (-1)^{1+2}$, alltså tecknet beror på indexens summa. I första termen är tecknet $+$, alltså $(-1)^{1+1}$. P.s.s. med tredje termens tecken.
Vi kan formellt skriva determinanten som

$$|\boldsymbol{A}| = (-1)^{1+1}a_{1,1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{1,2}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{1,3}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}.$$

Detta är innehållet i Utvecklingssatsen för typ $\boldsymbol{A} = 3 \times 3$. Man kan utveckla längs vilken rad elller kolonn fˆr att få determinantens värde.

Ex 1.6 Beräkna determinanten i ex 1.1 med Utvecklingssatsen.

Lösning:

$$\det \boldsymbol{A} \quad = \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Vi utvecklar längs kolonn 1:

$$\det \boldsymbol{A} = 2 \cdot (0 \cdot 3 - (-1) \cdot (-2)) - 1 \cdot ((-1) \cdot 3 - 0 \cdot (-2)) + 0 = -1.$$

P.s.s. kan man utveckal determinanten av en 4×4matris i underdeterminanter av typ 3×3.

Ex 1.7 Beräkna determinanten av $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ med Utvecklingssatsen.

Lösning:

Vi utvecklar m.a.p. kolonn 1 igen eftersom den har flest nollor.

$$|\boldsymbol{A}| \;=\; \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \; 2 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6(2 \cdot 3 - 5 \cdot 4) = -84.$$

Cramers regel För att räkna ut *bara en* koordinat/komponent i $\boldsymbol{X} = [x_, x_2 \ldots x_n]^T$ i matrisekvationen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ kan man använda denna regel. Antag att vi skall bestämma x_1 i $\boldsymbol{X}$ och att $\boldsymbol{B} = [b_1\, b_2 \ldots b_n]^T$. Då erhålls x_1 m.h.a. determinanter. LÂt $\boldsymbol{A}_1$ vara determinanten $\boldsymbol{A}$ men med kolonn 1 utbytt mot HL $\boldsymbol{B}$. DÂ är

$$x_1 = \frac{\det \boldsymbol{A}_1}{\det \boldsymbol{A}}, \text{ om } \det \boldsymbol{A} \neq 0. \tag{3}$$

Bevis:

Beviset bygger på att radoperationerna har motsvarande kolonnoperationer:
K_1 betyder multiplikation av en kolonn med ett tal c, som sedan adderas till en annan rad.
$K1$ ändrar inte på determinantens värde.

Dessutom kan man bryta ut en gemensam faktor ur en kolonn:
Antag att $\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{C}_1\, \boldsymbol{C}_2, \ldots \boldsymbol{C}_n]$ är kvadratisk med kolonnerna $\boldsymbol{C}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Determinanten

$$\det[x\boldsymbol{C}_1\, \boldsymbol{C}_2, \ldots \boldsymbol{C}_n] = x \det[\boldsymbol{C}_1\, \boldsymbol{C}_2, \ldots \boldsymbol{C}_n] = x \cdot \det \boldsymbol{C}.$$

Betrakta nu matrisekvationen

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \tag{4}$$

och determinanten

$$|\boldsymbol{A}_1| \;=\; |\boldsymbol{B}\, \boldsymbol{A}_2 \ldots \boldsymbol{A}_n| = \{\text{p.g.a. (3)}\} = |\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} \quad \boldsymbol{A}_2 \ldots \boldsymbol{A}_n| =$$

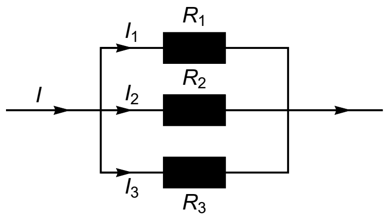
$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Multiplicera 2:a kolonn med $-x_2$, 3:e kolonn med $-x_3$ etc och till slut multplicera $n : e$ kolonn med $-x_n$ och addera till första kolonnen. Observera att dessa kolonnoperationer är K1 och ändrar inte determinantens värde. Det som återstår av kolonn 1 är $[a_{11}x_1 \quad a_{21}x_2 \quad \dots \quad a_{n1}x_1]^T$ och x_1 kan brytas ut ur determinanten $\boldsymbol{A}_1$. Det betyder att $|\boldsymbol{A}_1| = x_1\,|\boldsymbol{A}|$ eller ekvivalent

$$x_1 = \frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|}. \tag{5}$$

∎

Ex 1.8 I en elkrets har man tre strömmar och man är bara intresserad av I_1. Den kan beräknas med Cramers regel.



I elkretsen ovan är $\boldsymbol{I} = 12.0$ mA och motståndens resistanser $R_1 = 2.0$, $R_2 = 3.0$ och $R_3 = 6.0$ $k\Omega$.

Matriskekvationen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ R_1 & -R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi bildar matrisen

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} I & 1 & 1 \\ 0 & -R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{bmatrix} \text{ med determinant } I\,R_2\,R_3.$$

Determinanten av koefficientmatrisen är

$$\det \boldsymbol{A} = R_1R_2 + R_3R_2 + R_1R_3.$$

Alltså är

$$\boldsymbol{I}_1 = \frac{I\,R_2\,R_3}{R_1R_2 + R_3R_2 + R_1R_3}.$$

Med värden tagna under figuren erhålls

$$I_1 = \frac{6 \cdot 3 \cdot 6}{2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 6} = 3.0 \text{ mA}.$$

Två fall då determinanten $= 0$

– En determinants termer innehåller faktorer (element) en från varje rad och varje kolonn. Om en rad eller en kolonn är $\boldsymbol{0}$, alltså en nollrad eller nollkolonn, så är varje term $= 0$ och således är $|\boldsymbol{A}| = 0$.

– Från R2 får vi teckenändring på determinanten: $|\boldsymbol{A}'| = -|\boldsymbol{A}|$. Om två rader (eller kolonner) är lika kan vi byta plats på dessa. Då är $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}$, så att $|\boldsymbol{A}'| = |\boldsymbol{A}|$. Detta ger

$$|\boldsymbol{A}| = -|\boldsymbol{A}| \text{ d.v.s. } |\boldsymbol{A}| = 0.$$

Ex 1.9 Beräkna determinanten av matrisen

$$\text{(a)} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & 6 & -10 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{(c)} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Lösning:

(a) Denna matris har en nollrad och således är $\det \boldsymbol{A} = 0$.

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & 6 & -10 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ty två rader är lika.

(c) Med radoperationer erhåller man

$$\boldsymbol{C} \sim \boldsymbol{C}' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

med en nollrad.

$\det(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$: Man kan visa att

$$\det(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \det \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}.$$

Vi visar det i ett exempel

Ex 1.10 (Ex 1.1) Beräkna dels $\det(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$ och dels $\det \boldsymbol{A} \cdot \det \boldsymbol{A}$, där

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \text{ med determinant } \det(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = 1 \cdot 0 - 3 \cdot (-4) = 12$$

och

$$\det \boldsymbol{A} \cdot \det \boldsymbol{B} = (-1 + 4) \cdot (6 - 2) = 12.$$

$\det \boldsymbol{I}$: Det är klart att $\det \boldsymbol{I} = 1$ för alla ordningar. Nu är

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I} \Longrightarrow \det \boldsymbol{A} \cdot \det(\boldsymbol{A}^{-1}) = 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} = \det(\boldsymbol{A}^{-1}).$$

Ex.vis med $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ är $\det \boldsymbol{A} = 3$, så att $\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \dfrac{1}{3}$.
