1 *Skalär produkt på komponentform*

- I boken är definitionen redan på komponentfrom men vi definierar den utan komponenter.

Definition 1.1 Givet två vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ med mellanliggande vinkel θ.
Skalärprodukten definieras som

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} := ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| \cos \theta. \tag{1}$$

Komponentform Vi skall härleda $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ på komponenform för vektorer i $\mathbb{R}^2$. Skalär produkt i högre dimensioner följer samma mönster.
Vi har *Cosinussatsen*

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta = c^2$$

där $\theta (= C)$ är vinkeln mellan a och b. Vi låter $a = ||\boldsymbol{u}||$, $b = ||v||$, varande två sidor (sidolängder) i en triangel. En tredje sida är $||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}||$. Med komponenter är $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$. Ur (1) får vi

$$ab \cos \theta = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2).$$

I komopnentform är HL

$$\frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2) =$$

$$\tfrac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2) =$$

$$x_1x_2 + y_1y_2.$$

Vi ser alltså att

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Exempel 1.1 Givet $\boldsymbol{u} = (1, 2)$ och $\boldsymbol{v} = (5, 4)$. Beräkna

(a) längderna

(b) skalärprodukten samt

(c) vinkeln mellan vektorerna.

Lösning

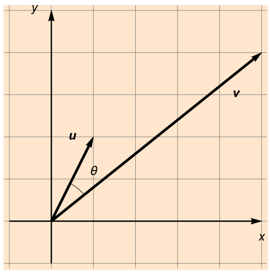
(a) Längderna: Vi har att $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = (-4, -2)$

$$||u|| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},\ ||v|| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41},\ (||u{-}v|| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5})$$

(b) Skalärprodukten: $1, 2 \cdot (5, 4) = 5 + 8 = 13$.

(c) Vinkeln mellan vektorerna:

$$\cos\theta = \frac{13}{\sqrt{5}\,\sqrt{41}} \Longleftrightarrow \theta = \arccos\left(\frac{13}{\sqrt{5}\,\sqrt{41}}\right) \approx 24.8^\circ.$$



■