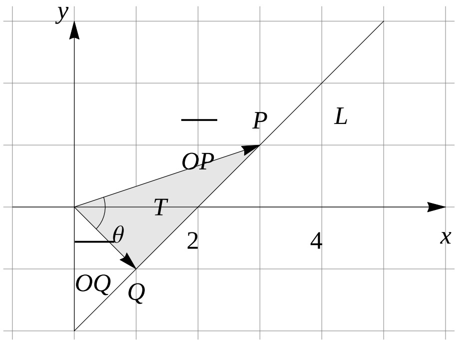
1 Vektorer i koordinatsystem

Ex 1.1 Givet ett koordinatsystem i $\mathbb{R}^2$ och punkterna $P = (3, 1)$ och $Q = (1, -1)$. Dessa kan uppfattas som ortsvektorer med startpunkt i origo $O = (0; 0)$.



Ortsvektorn $\overrightarrow{OP} = (3, 1)$ med slutpunkt i $P = (3; 1)$. P.s.s. med $\overrightarrow{OQ} = (1, -1)$ och $Q = (1, -1)$.

- $$\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} \Longleftrightarrow \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$$

  Komponentvis additioni sista ekvationen:

  $$\overrightarrow{QP} = (3, 1) - (1, -1) = (2, 2).$$

- Vinkeln θ mellan $\overrightarrow{OP}$ och $\overrightarrow{OQ}$ erhålls med skalär produkt.

  $$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|} = \frac{3-1}{\sqrt{10 \cdot 2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Longleftrightarrow \theta = \arccos(1/\sqrt{5}).$$

- Arean T av triangeln med hörn i O, P och Q är

  $$T = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}| = 2.$$

  Visserligen ligger inte P och Q i $\mathbb{R}^3$ men vi kan komplettera med en tredje komponent, som är 0, för motsvarande ortsvektorer.

■

Ex 1.2 Givet fyra punkter i $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} P = (1; 1; -1) \\ Q = (2; -1; -2) \\ R = (4; 6; 7) \\ S = (2; 3; 1) \end{cases}$$

a) Bestäm arean av triangeln med hörn i punkterna P, Q och R.

b) Bestäm volymen av tetraedern med hörn i de fyra punkterna ovan.

c) Bestäm en ekvation för planet Π, som innehåller P, Q och R.

d) Kalla planet i c) för Π_1. Betrakta planet Π_2 som har ekvationen $2x + y + 2z + 1 = 0$. Bestäm skärningen mellan dessa plan!

e) Ett tredje plan Π_3 är vinkelrät mot planen i d) och innehåller origo. Bestäm en ekvation för detta plan!

f) Bestäm avståndet mellan punkten S och planet Π_1!

g) Givet linjen L_2. $\begin{cases} 2x + z - 2 = 0 \\ y = -1 \end{cases}$. Skär denna linje den linje, som ges av svaret till d)?

h) Bestäm vinkeln mellan L_1 i d) och linjen som beskrivs av $\begin{cases} 2x + z - 2 = 0 \\ y = -1 \end{cases}$

i) Bestäm skärningspunkten mellan planet .i c) och linjen L_2 i g).

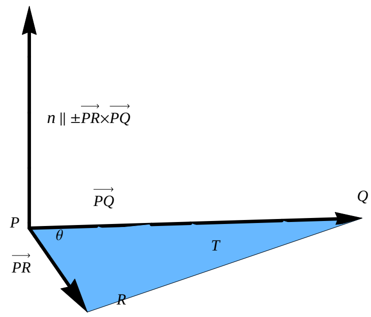
Lösning:

a) Bilda vektorerna

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (2, -1, -2) - (1, 1, -1) = (1, -2, -1) \\ \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (4, 6, 7) - (1, 1, -1) = (3, 5, 8), \text{ som ger} \\ \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (-11, -11, 11). \end{cases}$$

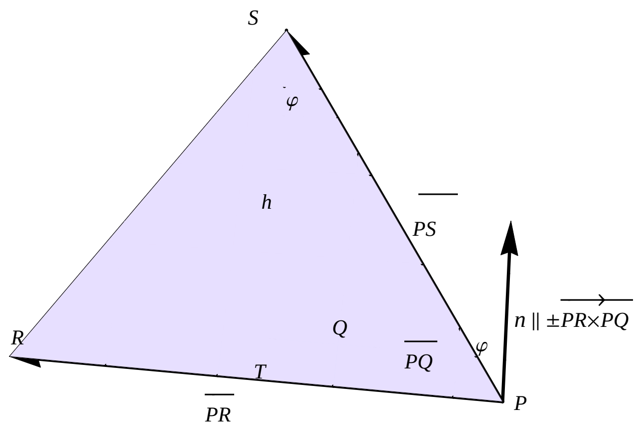
Arean av triangeln med hörn i punkterna P, Q och R är

$$T := \frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \frac{11}{2} \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \frac{11\sqrt{3}}{2} \text{ a.e.}$$



b) Volymen, V, av tetraedern med hörn i de fyra punkterna ovan fås genom att multiplicera T med höjden h och dividera med 3.

$$V = \frac{T \cdot h}{3}.$$



Vi ser att höjden h är parallell med $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ och bildar alltså samma vinkel med $\overrightarrow{PS}$. Vidare är $h = |\overrightarrow{PS}| \cos\varphi$. Vi får alltså att

$$V = \frac{Th}{3} = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| \cdot |\overrightarrow{PS}| \cos\varphi}{6}.$$

Täljaren är skalärprodukten

$$(\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}) \cdot \overrightarrow{PS}.$$

Vi sätter $\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ och $\overrightarrow{PR} = \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Som determinant skriver vi vektorprodukten som

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ - & \overrightarrow{PQ} & - \\ - & \overrightarrow{PR} & - \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{k}.$$

Vi multiplicerar nu denna vektor *skalärt* med $\overrightarrow{PS} =: \boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Denna vektor kommer då att ersätta rad 1 i determinanten, d.v.s.

$$(\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}) \cdot \overrightarrow{PS} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} - & \boldsymbol{c} & - \\ - & \boldsymbol{b} & - \\ - & \boldsymbol{a} & - \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 11.$$

Volymen är alltså $\frac{11}{6}$ v.e.

c) Ekvation för planet Π_1, som innehåller P, Q och R och alltså innehåller triangeln i a). Den fås genom att inse att *punkten* $(x; y; z)$ ligger i planet omm vektorerna $(x, y, z) - \overrightarrow{OP} \perp \boldsymbol{n}$, där $\boldsymbol{n}$ är en normalvektor till planet. En bra kandidat är $\boldsymbol{n} = (1, 1, -1)$, eftersom den är antiparallell med $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$. Planet Π_1:s ekvation är

$$\boldsymbol{n} \cdot ((x, y, z) - \overrightarrow{OP}) = 0 \text{ d.v.s. } (1, 1, -1) \cdot ((x, y, z) - (1, 1, -1)) = x + y - z - 3 = 0 \text{ (svar).}$$

d) Betrakta planet Π_2 som har ekvationen $2x + y + 2z + 1 = 0$. Skärningen är mängden av de punkter $(x; y; z)$, som uppfyller de båda ekvationerna. På matrisform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 7 \end{array}\right] \iff \begin{cases} x = & -3t - 4 \\ y = & 4t + 7 \\ z = & t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Med vektorer kan det skrivas

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) = t\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r}_0 = t\,(-3, 4, 1) + (-4, 7, 0).$$

Dett är en ekvation för en linje, d.v.s. en linje, som utgör skärningen mellan de två planen.

e) Ett tredje plan Π_3 är vinkelrät mot planen i d) och innehåller origo. En normalvektor för detta plan är $\boldsymbol{n}_3 = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$, där dessa vektorer är normalvektorer till Π_1 och Π_2. Alltså

$$\boldsymbol{n}_3 = (1, 1, -1) \times (2, 1, 2) = (3, -4, -1).$$

Planet Π_3:s ekvation är därmed $3x - 4y - z = 0$.
Vi observerar att $\boldsymbol{n}_3 = -\boldsymbol{v}$, d.v.s. lijnens riktningsvektor är antiparallell med $\boldsymbol{n}_3$.

f) Avståndet mellan punkten S och planet Π_1 är tetraederns höjd h. Vi vet att

$$V = \frac{Th}{3} \Leftrightarrow h = \frac{3V}{T} = \frac{3 \cdot 11}{6 \cdot \frac{11\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ l.e. (Svar)}$$

g) Givet linjen L_2. $\begin{cases} 2x + z - 2 = 0 \\ y = -1 \end{cases}$. Linjen L_1, som ges av svaret till d) har ekvationen $(x, y, z) = t(-3, 4, 1) + (-4, 7, 0)$. Linjen L_2 beskrivs av två plans ekvationer. Denna linje är alltså skärningen mellan dessa plan. Vi inför en parameter s för linjen. Sätt $x = s$. Då får vi

$$\begin{cases} x = s \\ y = -1 \\ z = 2 - 2s \end{cases} \quad \text{och sätt lika med den första linjens koordinater:} \quad \begin{cases} x = s = -3t - 4 \\ y = -1 = 4t + 7 \\ z = 2 - 2s = t \end{cases}$$

På matrisform:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -8 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim ... \sim \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \iff \begin{cases} s = 2 \\ t = -2 \end{cases}$$

Eftersom detta överbestämda har lösning skär linjerna varandra. Sätt ex.vis $s = 2$ i L_2 och vi får $(2; -1; -2)$, som alltså är skärningspunkten.

h) Vinkeln θ är, väsentligen, vinkeln mellan riktningsvektorerna $\boldsymbol{v}_1 = (-3, 4, 1)$ och $\boldsymbol{v}_2 = (1, 0, -2)$.

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1| \cdot |\boldsymbol{v}_2|} = \frac{-5}{\sqrt{26}\,\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{26}} < 0.$$

Vinkeln θ är alltså trubbig. Det är dock rimligt att ange en spetsig vinkel, nämligen *supplementvinkeln*, som är

$$\theta_1 = \arccos(\sqrt{5/26}.$$

i) Skärningen mellan linjen L_2 och planet Π_1 i c): Vi kan sätta in x, y och$z$ från linjens ekvation i planets ekvation.

$$x + y - z - 3 = s + (-1) - (2 - 2s) - 3 = 3s - 6 = 0 \iff s = 2.$$

Skärningspunkten är alltså $(2; -1; -2)$.

■

Kommentarer:

- För volymen b), sätt $\overrightarrow{PQ} =: \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{PR} =: \boldsymbol{b}$ och $\overrightarrow{PS} = \boldsymbol{c}$. Sånär som på tecken är volymen en sjättedel av

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \left| \begin{array}{ccc} - & \boldsymbol{a} & - \\ - & \boldsymbol{b} & - \\ - & \boldsymbol{c} & - \end{array} \right|,$$

  där vektorena $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$ utgör rader i determinanten.
  VL kallas *trippel skalär produkt.* Vi vet att determinanten ändrar tecken vid radbyte. Ex.vis är

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{c}.$$

- Om $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = 0$ kallas de tre vektorerna *koplana.* Likheten med 0 betyder att de kan läggas i ett gemensamt plan.