September 20, 2018

Innehållsregister

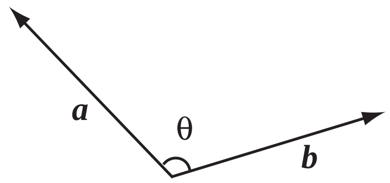
1 Vektorer

1.1 Geometrisk vektor

Med en geometrisk vektor menas vektor utan koordinatsystem. Där definieras vektoralgebran. Vi definierar följande egenskaper.

- En vektor betecknas med gemen och fet stil $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ etc.
- Med start- och slutpunkt A respektive B skrivs vektorn $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{u}$.
- En vektor äger två egenskaper längd $||\boldsymbol{u}||$ och riktning, en vinkel θ.
- En vektor kan förflyttas parallellt och förbli samma vektor.
- $||\boldsymbol{u}|| \geq 0$ med liket omm $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, nollvektorn. Den har samma start- som slutpunkt, se figur nedan.
- Vektorn $c\boldsymbol{u}$ är vektorn (anti-)parallell med $\boldsymbol{u}$, där $c \geq 0$ ($c < 0$) och har längden $||c\boldsymbol{u}|| = |c| \cdot ||\boldsymbol{u}||$.
- Vinkeln mellan två vektorer är vinkeln θ mellan vinkelbenen $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$, där startpunkterna sammanfaller. $0 \leq \theta \leq \pi$. Om $\theta = 0\,(= 0^\circ)$ är vektorerna parallella. Om $\theta = \pi\,(= 180^\circ)$ är vektorerna motsatt riktade eller antiparallella.
- Addition av vektorer: Vektorn $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ är vektorna med startpunkt som $\boldsymbol{u}$ och slutpunkt som $\boldsymbol{v}$ då $\boldsymbol{u}$:s slutpunkt och $\boldsymbol{v}$:s startpunkt sammanfaller.

En vektor $\boldsymbol{u}$ har en start- och slutpunkt A respektive B: $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{u}$.



1.2 Vektor och koordinatsystem

- Givet en punkt $P = (1; 2)$ så är 1 och 2 dess *koordinater*.
  Motsvarande *ortsvektor* är $\overrightarrow{OP} = (1, 2)$ med startpunkt i origo och slutpunkt i P.
  1 och 2 är dess *komponenter*.
- Längden av vektorn är då $||(1, 2)|| = \sqrt{1^2 + 2^2}$, som ju också är avståndet melan origo och punkten $P = (1; 2)$.
- Addition av vektorer är komponentvis. Multplikation med skalär (reellt tal) ger också komponentvis.

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (1, 2) + (5, 4) = (6, 6), \quad c \cdot \boldsymbol{u} = (c, 2c) \text{ med längd } |c| \cdot \sqrt{5}.$$

- Linjens ekvation på parameter/vektorform:
  - Givet två punkter $P = (1; 2)$ och $Q = (5; 4)$. Definiera motsvarande ortsvektorer $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{u} = (1, 2)$ och $\overrightarrow{OQ} = \boldsymbol{v} = (5, 4)$. Bestäm en ekvation genom dessa två punkter:
    Startpunkt, som vektor, kan vi ta $\boldsymbol{r}_0 := \boldsymbol{u} = \overrightarrow{OP} = (1, 2)$ och som *riktningsvektor* kan vi ta $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (4, 2)$. En ortsvektor på linjen kan uttryckas med dessa men först halverar vi $\boldsymbol{v}$:s längd så vi får $\boldsymbol{v}_1 = (2, 1)$ ($\parallel$ $(4, 2)$).

    $$\boldsymbol{r} := (x, y) = \boldsymbol{r}_0 + t \cdot \boldsymbol{v}_1 \text{ eller } (x, y) = (1, 2) + t(2, 1),\ t \in \mathbb{R}\,.$$

    Vi kan eliminera t ur första koordinaten och likaså ur andra:

    $$t = \frac{x-1}{2} = y - 2 \Longrightarrow y = \frac{x+3}{2}.$$

- En enhetsvektor $\boldsymbol{e}$ är en vektor med längd 1. Ex.vis är $\boldsymbol{u} = (1, 2)$ inte en enhetsvektor eftersom dess längd är $\sqrt{5}$. Men däremot är $\boldsymbol{e} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$ en enhetsvektor $\parallel$ $(1, 2)$.
- Enhetsvektorer parallella med koordinataxlarna är

$$\begin{cases} (1,0) & = \boldsymbol{i} = \boldsymbol{e}_x \\ (0,1) & = \boldsymbol{j} = \boldsymbol{e}_y \end{cases} \text{ i } \mathbb{R}^2 \text{ och } \begin{cases} (1,0,0) & = \boldsymbol{i} = \boldsymbol{e}_x \\ (0,1,0) & = \boldsymbol{j} = \boldsymbol{e}_y \\ (0,0,1) & = \boldsymbol{k} = \boldsymbol{e}_z \end{cases} \text{ i } \mathbb{R}^3.$$

Man kan skriva en vektor $\boldsymbol{u} = (x_1, y_1) = (x_1, 0) + (0, y_1) = x_1 \cdot (1, 0) + y_1 \cdot (0, 1) = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j}$.

1.3 Skalär produkt (dot eller inner product)

Definition 1.1 Skalärprodukten $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} := ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| \cos\theta$.

Kommentarer

- $\cos 0^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$ och $\cos 180^\circ = -1$, så att
$$-||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| \leq \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \leq ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}||.$$
  Dessutom är $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$, om $\theta = 90^\circ$.
- Man kan visa att skalärprodukten är distributiv:
$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}.$$
- Speciellt för en vektor med längd 1 är
$$\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e} = ||\boldsymbol{e}|| \cdot ||\boldsymbol{e}|| \cdot \cos 0^\circ = 1.$$
  Och mer allmänt
$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = ||\boldsymbol{u}||^2.$$
  Om två vektorer är vinkelräta är $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| \cos 90^\circ = 0$.
- Ex.vis är
$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} &= (1,2) \cdot (5,4) = (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}) \cdot (5\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}) = \\ &= \boldsymbol{i} \cdot 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{i} \cdot 5\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{j} \cdot 5\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} \cdot 4\boldsymbol{j} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 13. \end{aligned}$$
- Allmänt är
$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

1.4 Vinkel mellan vektorer

Vinkeln mellan vektorerna $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$:
$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| \cdot \cos\theta \Longleftrightarrow \cos\theta = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}||}.$$

- Vinkeln mellan vektorerna $\boldsymbol{u} = (1,2)$ och $\boldsymbol{v} = (5,4)$ ges av sambandet
$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}||} = \frac{13}{\sqrt{5 \cdot 41}} \Longleftrightarrow \theta = \arccos\left(\frac{13}{\sqrt{5 \cdot 41}}\right)$$
- P.s.s. är cosinus för vinkeln mellan $(1,3)$ och $(1,-2)$
$$\cos\theta = \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2)}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Longleftrightarrow \theta = 135^\circ.$$

1.5 $\mathbb{R}^3$

Koordinataxlarna $x-$, $y-$ och $z-$axeln bildar et *högersystem* i den ordningen. Addition och multiplikation med skalär, samt skalär produkt är som i $\mathbb{R}^2$.

Exempel 1.1 Givet $P = (1;2;1)$ och $Q = (3;5;8)$. Då är linjens ekvation på parameterform (genom dessa två punkter)

$$(x, y, z) = t\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{OP} \text{ och med siffror } \begin{cases} x = & 2t + 1 \\ y = & 3t + 2 \\ z = & 7t + 1 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

■

Exempel 1.2 Vinkeln mellan $\overrightarrow{OP} = (1, 2, 1) =: \boldsymbol{u}$ och $\overrightarrow{OQ} = \boldsymbol{v}$ beräknas p.s.s. som $\mathbb{R}^2$:

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}||} = \frac{(1, 2, 1) \cdot (3, 5, 8)}{||(1, 2, 1)|| \cdot ||(3, 5, 8)||} = \frac{21}{\sqrt{6}\,\sqrt{98}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \theta = 30^\circ.$$

■

1.6 Vektorprodukt (Cross product)

Det finns en vektoriell produkt (vektorprodukt eller cross product) men bara i $\mathbb{R}^3$. Givet två vektorer $\boldsymbol{u} = (1, 2, 1)$ och $\boldsymbol{v} = (3, 5, 8)$. Dessa kan läggas i ett plan i $\mathbb{R}^3$.

Definition 1.2 Man definierar då en tredje vektor utfrån dessa två som skrivs $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$. För $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ gäller följande

1. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{v}$.
2. $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ bildar ett *högersystem.*
3. *Längden* $||\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|| = ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| \cdot \sin\theta$.

Kommentarer

- $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ eftersom dess längd är $||\boldsymbol{u}||^2 \cdot \sin\theta$ och vinkeln mellan $\boldsymbol{u}$ och sig själv är $\theta = 0^\circ$ och $\sin 0^\circ = 0$.

- Omm $\theta = 90°$ är $||\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|| = ||\boldsymbol{u}||||\boldsymbol{v}|| \cdot 1$

- Ett högersystem utgörs av höger hands tumme, pekfinger och långfinger (i den ordningen).

> **Sats 1.1**
>
> - Vektorprodukten är antikommutativ, som betyder att
>
> $$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}.$$
>
> - Vektorprodukten är vänster- och högerdistributiv (men inte associativ).

EXEMPEL 1.3 Ex,vis är $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}$ och $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j}$.

Bevis: $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} \parallel \boldsymbol{k}$ eftersom båda vektorerna är vinkelräta mot både $\boldsymbol{i}$ och $\boldsymbol{j}$ samt bildar ett högersystem med $\boldsymbol{i}$ och $\boldsymbol{j}$ (i den ordningen). Vi visar nu att de har smma längd, $||\boldsymbol{k}|| = 1$ per definition.

$$||\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}|| = ||\boldsymbol{i}|| \cdot ||\boldsymbol{j}|| \sin 90° = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

V.S.B

■

Kommentarer

- $$\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$$

  och

  $$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}$$

1.7 Beräkning av vektorprodukt som determinant

Vi sätter $\boldsymbol{u} = (x_1, y_1, z_1)$ och $\boldsymbol{v} = (x_2, y_2, z_2)$. Då blir

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Detta kan göras genom att beräkna determinanten (ex,vis med Sarrus regel).

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Exempel 1.4

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (1, 2, 1) \times (3, 5, 8) = ... = (11, -5, -1).$$

■

Exempel 1.5 Beräkna arean av triangeln med hörn i $P = (1; 1; 3)$, $Q = (2; 3; 4)$ och $R = (4; 6; 11)$.

Lösning

Bilda vektorna

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (2, 3, 4) - (1, 1, 3) = (1, 2, 1)$$

och

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (4, 6, 11) - (1, 1, 3) = (3, 5, 8).$$

Triangelns area är $T = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{PR}| \sin\theta$, där θ är vinkeln mellan $\overrightarrow{PQ}$ och $\overrightarrow{PR}$. Men detta är just halva beloppet/längden av $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$. Arean är

$$T = \frac{1}{2}\sqrt{11^2 + (-5)^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{147} = \frac{7}{2} \cdot \sqrt{3} \text{ a.e.}$$

■

Exempel 1.6 **Projektion**

Givet två vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ (geometriska vektorer). Man talar om *skalär projektion av* $\boldsymbol{u}$ *på* $\boldsymbol{v}$. Den är

$$||\boldsymbol{u}|| \cos\theta = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|||v||}.$$

För att göra en *vektoriell projektion*, multiplicerar vi den skalära projektionen med enhetsvektorn parallell med $\boldsymbol{v}$, som blir

$$\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{||\boldsymbol{v}||}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{||\boldsymbol{v}||}.$$

Med $\boldsymbol{u} = (1, 2, 1)$ och $\boldsymbol{v} = (3, 5, 8)$ blir dessa

$$||\boldsymbol{u}||\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{||\boldsymbol{v}||} = \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ respektive } \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{||\boldsymbol{v}||^2}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{98}(63, 105, 168) = \frac{1}{14}(9, 15, 24) = \frac{3}{14}\boldsymbol{v}.$$

■

Exempel 1.7 **Ekvation för ett plan**

Betrakta punkterna i föregående exempel. De ligger inte på linje ty i så fall vore $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \mathbf{0}$, nollvektorn.

Villkoret för att en punkt $(x; y; z)$ ligger i planet är ekvivalent med att vektorn

$$\overrightarrow{OP} - (x, y, z) \perp (11, -5, -1).$$

Det är i sin tur ekvivalent med att skalärprodukten

$$[(x, y, z) - (1, 1, 3)] \cdot (11, -5, -1) = 11x - 5y - z - 3 = 0.$$

■

Exempel 1.8 **Volym av tetraeder**

Vi observerar först att volymen för en tetraeder, pyramid eller kon ges av

$$V = \frac{B\cdot h}{3} \text{ där } h \text{ och } B \text{ är höjd respektive basytans area.}$$

Punkterna P, Q och R kompletteras nu med punkten $S = (4; 4; 6)$. Beräkna volymen V av tetraedern med hörn i dessa fyra punkter.

Lösning

"bottentriangelns" area är $\frac{7}{2}\cdot\sqrt{3}$ a.e. Vi skall inte utgå från detta utan ser att $(11, -5, -1)$ är (anti-)parallell med tetraederns höjd h. Vektorn $\overrightarrow{PS}$ bildar vinkeln φ med $(11, -5, -1)$. Den skalära produkten

$$\overrightarrow{PS}\cdot(11, -5, -1) = ||(11, -5, -1)|| \cdot \underbrace{||\overrightarrow{PS}|| \cdot \cos\varphi}_{=h} = h \cdot 2T.$$

Volymen kan med dessa beteckningar skrivas

$$V = \frac{h \cdot T}{3}.$$

Nu är $\overrightarrow{PS} = (4,4,6) - (1,1,3) = (3,3,3)$. Alltså är

$$V = \frac{3}{6}(11,-5,-1) \cdot (1,1,1) = \frac{5}{2} \text{ v.e.}$$

■

Kommentarer

- Det kan hända att vinkeln φ är trubbig. Det ger volymen med fel tecken. Justeras med teckenbyte till ett tal ≥ 0.
- Vi har alltså beräknat
$$\overrightarrow{PS} \cdot (\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR})$$
en *trippel skalär produkt*. Den kan direkt beräknas som en determinant, med $\overrightarrow{PS} = (x_3, y_3, z_3)$:
$$\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \{2 \text{ radbyten}\} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Exempel 1.9 Givet ES

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

vars lösning är en linje L1 (Ex 1.8 i linalgebra01.pdf) och linjen L2: $(x,y,z) = t(2,-1,1) + (-1,1,1) \quad t \in \mathbb{R}$.
Avgör om linjerna skär varandra.

Lösning

Lösningen på ES är

$$\begin{cases} x = 7t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$$

Skärningen bör vara en punkt men det behöver inte vara samma t i båda ekvationerna. Vi byter därför t mot s i den sista ekvationen. Det ger ett ES

$$\begin{cases} 7s = 2t - 1 \\ 1 - 3s = 1 - t \\ 2s = t + 1 \end{cases} \iff s = -1, \quad t = -3.$$

Eftersom detta överbestämda ES *har* lösning, finns en skärningspunkt. Den erhålls genom att sätta in $t = -3$ i L2:

$$(x; y; z) = (-7; 4; -2).$$

■

Exempel 1.10 De två linjerna i Ex 1.8 i linalgebra01.pdf skär alltså varandra längs linjen L1:

$$\begin{cases} x = 7t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Bestäm det plan som är vinkelrät mot planen Π_1 och Π_2 givna av

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

och innehåller skärningspunkten $(-7; 4; -2)$.

Lösning

Planen har normalvektorer $\boldsymbol{n}_1 = (1, 1, -2)$ och $\boldsymbol{n}_2 = (0, 2, 3)$. En vinkelrät vektor mot dessa är $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = (7, -3, 2)$, riktningsvektorn för skärningslinjen!
Planet som söks, kallar vi Π_3. Det har denna vektor som normalvektor. Alltså $\boldsymbol{n}_3 = (7, -3, 2)$. Ekvationen får som

$$(7, -3, 2) \cdot ((x, y, z) - (-7, 4, -2)) = 7x - 3y + 2z + 65 = 0 \text{ (Svar)}$$

■

1.7.1 Avstånd mellan punkt och plan

- Givet en punkt P_1 med motsvarande ortsvektor $\boldsymbol{r}_1 = (x, y, z)$ och ett plan Π, med normalvektor $\boldsymbol{n}$ och P_0 en punkt i planet med motsvarande ortsvektor $\boldsymbol{r}_0$. Avståndet mellan punkten och planet ges av

$$d = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)|}{||\boldsymbol{n}||} = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad (1)$$

där planets ekvation är $Ax + By + Cz + D = 0$.

Exempel 1.11 Vi har, i exempel 1.7 planet med ekvation

$$\Pi_0 : 11x - 5y - z - 3 = 0.$$

Exempel 1.8 har vi tetraedern med basyta i detta plan. Ett fjärde hörn är $S = (4; 4; 6) = (x; y; z)$. Tetraederns volym är $V = \frac{5}{2}$ (v.e.). Vi skall nu beräkna avståndet mellan planet och punkten S. Det är, per definition det minsta avståndet. Vi får avståndet så här: Tag ex.vis vektorn $\overrightarrow{PS} = (3, 3, 3)$. Den bildar en vinkel φ med normalvektorn $\boldsymbol{n} = (11, -5, -1)$. Avståndet är $d = ||\overrightarrow{PS}|| \cos\varphi$. Avståndet kan skrivas

$$d = \frac{||\boldsymbol{n}|| \cdot ||\overrightarrow{PS}|| \cos\varphi}{||\boldsymbol{n}||} = \frac{\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{PS}}{||\boldsymbol{n}||} = \frac{(11, -5, -1) \cdot ((x, y, z) - (1, 1, 3))}{\sqrt{11^2 + (-5)^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{3}}{7} \text{ l.e.}$$

Nu är avståndet d också höjden i tetraedern. Triangelns area är $T = \frac{7\sqrt{3}}{2}$. Tetraederns volym kan alltså skrivas

$$V = \frac{T\,h}{3} = \frac{\frac{7\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{7}}{3} = \frac{5}{2} \text{ v.e., som tidigare.}$$

■

- Givet en punkt P och en linje. Hur får man avståndet mellan dessa? Med avstånd menas det minsta, som samtidigt är det vinkelräta avståndet. Genom att rita ser vi att avståndet ges av

  $$d = ||\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0||\,\sin\theta = \frac{||\boldsymbol{v}|| \cdot ||\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0||\,\sin\theta}{||\boldsymbol{v}||} = \frac{||\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)||}{||\boldsymbol{v}||},$$

  d.v.s.

  $$d = \frac{||\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)||}{||\boldsymbol{v}||}, \tag{2}$$

  där $\boldsymbol{v}$ är riktningsvektor för linjen och $\boldsymbol{r}_0$ är en punkt sedd som ortsvektor på linjen.

EXEMPEL 1.12 Givet linjen L2 i exempel 1.9: $(x, y, z) = t\,(2, -1, 1) + (-1, 1, 1)$ och punkten $Q = (4; 6; 11)$ (exempel 1.5). Beräkna avståndet mellan dessa.

Lösning

Avståndet är

$$d = ||\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0||\,\sin\theta = \frac{||\boldsymbol{v}|| \cdot ||\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0||\,\sin\theta}{||\boldsymbol{v}||} = \frac{||\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)||}{||\boldsymbol{v}||}.$$

$$\boldsymbol{r}_0 = (-1, 1, 1),\ \boldsymbol{r}_1 = (4, 6, 11) \text{ och } \boldsymbol{v} = (2, -1, 1).$$

$$\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0 = (5, 5, 10) \Longrightarrow \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0) = 5(-3, -3, 3).$$

Täljaren och nämnaren är alltså

$$15||(-1, -1, 1)|| = 15\sqrt{3} \text{ respektive } \sqrt{6}, \text{ som ger } d = \frac{15\sqrt{2}}{2}.$$

■