

Tentamen för Matematisk överbrygningskurs

Tid och plats: 2017-06-08, kl 14:00-18:00, L. **Ansvarig:** Jacques Huitfeldt, 031-7721093.

Betygsgränser: 20, 30 resp. 40 poäng. Tentan omfattar totalt 50 poäng.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel tillåtna, utom bifogat formelblad.

Uppgift 1. Antag \hat{x} är en lösning till ekvationen $f(x) = 0$ med $f'(\hat{x}) \neq 0$. Visa att om Newtons metod konvergerar mot \hat{x} så gäller att konvergensen är kvadratisk.

Uppgiften ger maximalt **(8p)**

Uppgift 2. Lamberts W -funktion $W(x)$ definieras av ekvationen

$$x = W(x) \exp(W(x))$$

Vi skall rita grafen av $W(x)$ över intervallet $0 \leq x \leq 20$ på två olika sätt.

(a). Skriv en kod i MATLAB som använder `fzero` för att rita upp grafen av $W(x)$.

(b). Derivera ekvationen för funktionen $W(x)$ så att vi får en differentialekvation för $W(x)$. Skriv den kod i MATLAB som behövs för att med hjälp av `ode45` lösa differentialekvationen och rita upp grafen av $W(x)$.

Hela uppgiften ger maximalt **(8p)**

Uppgift 3. Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{cases} u'' + \cos(x)u = \exp(x), & 0 < x < 1 \\ u'(0) = 1, & u(1) = 3 \end{cases}$$

(a). Gör en indelning av intervallet så att vi får n inre punkter. Skriv ned matrisekvationen vi får då vi i problemet ersätter derivator med differensapproximationer. Vi vill se matrisen och högerledsvektorn.

(b). Härled de differensapproximationer du använde i (a). Det skall framgå vilken noggrannhetsordning approximationerna har.

(c). Skriv den kod i MATLAB som behövs för att bygga upp matris och högerled från (a), samt beräkna lösningen och rita upp den. Matrisen skall lagras som en gles matris med `spdiags`. Även randvillkoren skall finnas med vid uppritningen.

Hela uppgiften ger maximalt **(8p)**

Uppgift 4. Betrakta följande linjära system av ODE

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}, & t > 0 \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(a). Lös problemet med egenvärdesmetoden.

Fortsätter >>>

(b). Härled formeln du använde i (a) utgående från att \mathbf{A} är diagonaliserbar ($\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{D}$).

(c). Tag ett steg med Euler framåt med steglängden $h = 0.1$.

Hela uppgiften ger maximalt (8p)

Uppgift 5. Betrakta det icke-linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2^3 - 1 = 0 \\ x_1 \exp(x_1 x_2) + x_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

(a). Skriv systemet på kompakt form $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Vad blir $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ och vad blir $\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{x})$, dvs. beräkna derivatamatriisen.

(b). Härled Newtons metod för ekvationen $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

(c). Tag ett steg med Newtons metod utgående från startapproximationen $\mathbf{x}_0 = (1, 0)$ för hand, dvs. utför beräkningarna med papper och penna.

(d). Skriv ned den kod i MATLAB som utgående från startapproximationen $\mathbf{x}_0 = (1, 0)$ beräknar lösningen med Newtons metod.

Hela uppgiften ger maximalt (8p)

Uppgift 6. Betrakta följande tidsberoende problem

$$\begin{cases} u'_t = u''_{xx} + f(x, t), & 0 < x < 5, & 0 < t \leq T \\ u(0, t) = g(t), & u'_x(5, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & & 0 < x < 5 \end{cases}$$

där $f(x, t) = 0.2x \exp(-0.2t)$ och $g(t) = 1 + \sin(0.7t)$.

(a). Vi skall lösa problemet med linjemetoden. Skriv ned det begynnelsevärdesproblem vi får då vi approximerar x -derivatorna med differenskvoter. Vi vill ha svaret på vektorform.

(b). Skriv ned den kod som i MATLAB behövs för att med `ode45` beräkna och sedan rita upp $u(x, t)$ för $0 < t \leq T$ med $T = 25$. Tänk på att även värdena vid $x = 0$ och $x = 5$ skall finnas med vid uppritningen.

Hela uppgiften ger maximalt (10p)

Differensapproximationer

$$D_+u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x) + \mathcal{O}(h), \quad D_-u(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} = u'(x) + \mathcal{O}(h)$$

$$D_0u(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u'(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

$$D_+D_-u(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = u''(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\frac{u(x+2h) - 2u(x+h) + 2u(x-h) - u(x-2h)}{2h^3} = u'''(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\frac{u(x+2h) - 4u(x+h) + 6u(x) - 4u(x-h) + u(x-2h)}{h^4} = u^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

Taylorutveckling

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \mathcal{O}((x-a)^{n+1})$$

Taylorutveckling i två variabler

$$f(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k + \frac{1}{2}(f''_{xx}(a, b)h^2 + 2f''_{xy}(a, b)hk + f''_{yy}(a, b)k^2) + \dots$$

där $h = x - a$ och $k = y - b$.

Lite stolpar i MATLAB som stöd för minnet.

Elementära funktioner

`abs(x)`, `sqrt(x)`, `exp(x)`, `log(x)`, `cos(x)`, `sin(x)`, `tan(x)`

Matris- och vektorfunktioner

`size(A)`, `length(v)`

`sum(v)`, `prod(v)`, `max(v)`, `min(v)`, `sort(v)`, `norm(v)`, `dot(u,v)`

Matrisuppbyggande funktioner

`A=ones(m,n)`, `A=zeros(m,n)`, `A=eye(m,n)`, `A=diag(d,k)`, `A=spdiags(D,K,m,n)`

Villkorssatser

```
if uttryck
    satser
end
```

```
if uttryck
    satser
else
    satser
end
```

```
if uttryck
    satser
elseif uttryck
    satser
end
```

Repetitionssatser

```
while uttryck
    satser
end
```

```
for variabel=uttryck
    satser
end
```

```
for variabel=start:steg:slut
    satser
end
```

Egna funktioner

```
function ut=funktionsnamn(parametrar)
    satser
```

```
handtagsnamn=@(parametrar) sats
```

Beräkningsfunktioner

`x=fzero(f,x0)`, `x=fminbnd(f,x0,x1)`, `q=integral(f,a,b)`, `[t,U]=ode45(f,tspan,u0)`

`x=A\b`, `[V,D]=eig(A)`, `[V,D]=eigs(A,K,'SM')`

`x=fsolve(f,x0)`, `x=fminunc(f,x0)`, `q=integral2(f,a,b,c,d)`

Grafik

`x=linspace(a,b,n)`

`plot(x,y)`, `plot3(x,y,z)`, `quiver(u,v,du,dv,sc)`, `quiver3(...)`

`[X,Y]=meshgrid(x,y)`

`surf(X,Y,Z)`, `contour(X,Y,Z,lv)`