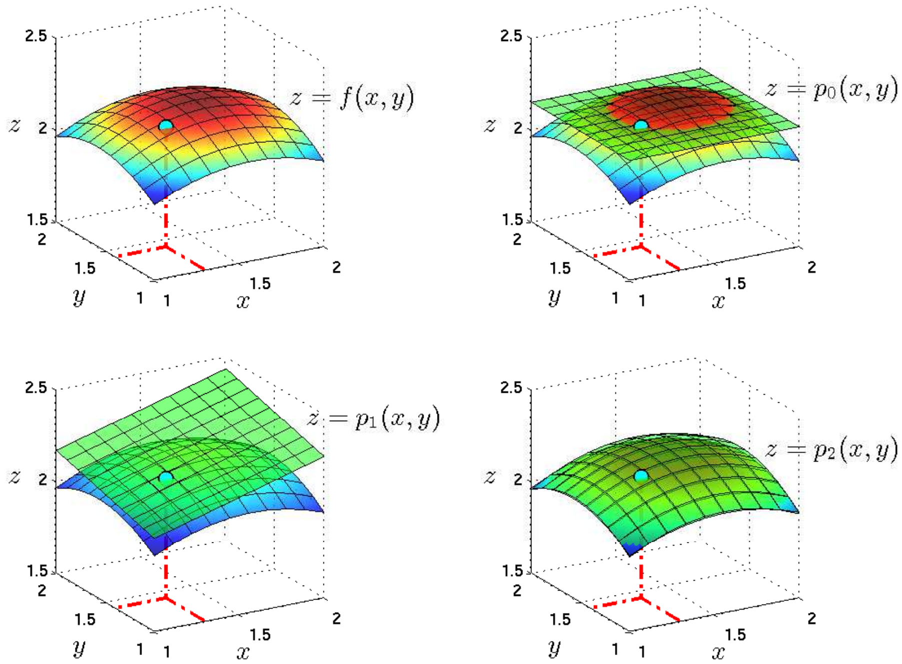
Taylorutveckling i flera variabler

Vi skall lokalt runt en punkt (a, b) approximera en funktion $f(x, y)$ med ett polynom $p(x, y)$.
Ett naturligt önskemål är att $p(a, b) = f(a, b)$, $p'_x(a, b) = f'_x(a, b)$, $p'_y(a, b) = f'_y(a, b)$, $\cdots$
Först tar vi följande polynom av grad $n = 0$

$$p_0(x, y) = f(a, b)$$

vilket är ett horisontellt plan genom punkten $(a, b, f(a, b))$.
Villkoret $p(a, b) = f(a, b)$ är uppfyllt, dvs. vi beskriver *nivån* för grafen till $f(x, y)$ i punkten (a, b).



Sedan tar vi följande polynom av grad $n = 1$

$$p_1(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$$

vilket är tangentplanet till f i punkten $(a, b, f(a, b))$.
Nu gäller $p'_x(a, b) = f'_x(a, b)$ och $p'_y(a, b) = f'_y(a, b)$, dvs. vi får med *lutningen* hos grafen till $f(x, y)$ i punkten (a, b).
Därefter tar vi graden $n = 2$ och polynomet

$$p_2(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) + \\ + \frac{f''_{xx}(a, b)}{2}(x - a)^2 + f''_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{f''_{yy}(a, b)}{2}(y - b)^2$$

Nu gäller dessutom $p''_{xx}(a, b) = f''_{xx}(a, b)$, $p''_{xy}(a, b) = f''_{xy}(a, b)$, och $p''_{yy}(a, b) = f''_{yy}(a, b)$, dvs. vi får med hur grafen till $f(x, y)$ *buktar* i punkten (a, b).

Sats: *Taylors formel.* Om $f(x,y)$ har oändligt många kontinuerliga derivator i en omgivning runt (a,b) så gäller

$$f(x,y) = f(a,b) + f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k + \\ + \tfrac{1}{2}\big(f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2\big) + \cdots$$

där $h = x - a$ och $k = y - b$.

Bevis: Använder vi Taylors formel i en variabel på funktionen

$$g(t) = f(a+th, b+tk),\ 0 \le t \le 1$$

så gäller

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \tfrac{1}{2}g''(0)t^2 + \cdots$$

Vi har

$$g'(t) = f'_x(a+th, b+tk)h + f'_y(a+th, b+tk)k$$

$$g''(t) = f''_{xx}(a+th, b+tk)h^2 + 2f''_{xy}(a+th, b+tk)hk + f''_{yy}(a+th, b+tk)k^2$$

och

$$g(0) = f(a,b)$$

$$g'(0) = f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k$$

$$g''(0) = f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2$$

Med $t = 1$ har vi

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \tfrac{1}{2}g''(0) + \cdots$$

och därmed

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k + \\ + \tfrac{1}{2}\big(f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2\big) + \cdots$$

Ett viktigt specialfall är *linjärisering*, då vi har $n = 1$ och

$$f(x,y) \approx L(x,y) = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$$

dvs. funktionen approximeras av sitt tangentplan.

För en funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ får vi Taylorutvecklingen runt $\boldsymbol{a}$ enligt

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})(x_j - a_j) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) + \cdots$$

Med vektor- och matrisbeteckningar kan detta skrivas

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{a})^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^T \boldsymbol{H}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \cdots$$

där *gradienten* $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x})$ och *Hessematrisen* $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ ges av

$$\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}$$

Vi ser i detalj hur vi för $n = 2$ skriver om

$$f(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k+$$
$$+\tfrac{1}{2}\big(f''_{xx}(a, b)h^2 + 2f''_{xy}(a, b)hk + f''_{yy}(a, b)k^2\big) + \cdots$$

med matrisbeteckningar. Detta kan skrivas

$$f(x, y) = f(a, b) + \begin{bmatrix} f'_x(a, b) & f'_y(a, b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} +$$

$$+\frac{1}{2} \begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f''_{xx}(a, b) & f''_{xy}(a, b) \\ f''_{yx}(a, b) & f''_{yy}(a, b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + \cdots$$

eller

$$f(x, y) = f(a, b) + \boldsymbol{\nabla} f(a, b)^T \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} \boldsymbol{H}(a, b) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + \cdots$$

Med vektorbeteckningar $\boldsymbol{x} = (x, y)$, $\boldsymbol{a} = (a, b)$ kan detta skrivas

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{a})^T (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^T \boldsymbol{H}(\boldsymbol{a}) (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \cdots$$

där $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = (x - a, y - b) = (h, k)$.