MATEMATIK — Hjälpmedel: Inga
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Tentamen 2015-01-17 kl. 14:00–18:00
Telefonvakt: Samuel Bengmark ankn.: 0723-876441
Betygsgränser 3:a 20 poäng, 4:a 30 poäng, 5:a 40 poäng, max: 50 poäng
Tentamensgranskning kommer att ske 27 januari klockan 15.15 i sal Ω.

Matematisk analys — LMA400

OBS: Tänk på att det huvudsakligen är beräkningar och motiveringar som ger poäng!

Teori

1. Bevisa Fermats sats, det vill säga att om funktionen f har ett lokalt maximum eller lokalt minimum i c och om $f'(c)$ existerar, så är $f'(c) = 0$. 6 p

Lösning:
Se sidan 276 till 277 i Stewart.

2. Formulera och bevisa formeln för partiell integration. 6 p

Lösning: 6 p
Se sidan 464 i Stewart.

Problem

3. Beräkna följande gränsvärden

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{12x^2+7x+1}{3-x+4x^2}$ 2 p

Lösning:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{12x^2+7x+1}{3-x+4x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}(12+\overset{\nearrow 0}{\frac{7}{x}}+\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{x^2}})}{\cancel{x^2}(\underset{\searrow 0}{\frac{3}{x^2}}-\underset{\searrow 0}{\frac{1}{x}}+4)} = \frac{12}{4} = 3.$$

(b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-\sqrt{x+2}}$ 2 p

Lösning:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-\sqrt{x+2}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)(x+\sqrt{x+2})}{x^2-x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)(x+\sqrt{x+2})}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+3)(x+\sqrt{x+2})}{(x+1)} = \frac{5\cdot 4}{3} = \frac{20}{3}.$$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\tan(2x)+\cos(x)-1}$ 2 p

Lösning:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\tan(2x)+\cos(x)-1} = \frac{\text{“}0\text{”}}{0} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{\frac{2}{\cos^2(2x)} - \sin(x)} = \frac{1}{2}.$$

4. Beräkna följande integraler

(a) $\int \frac{1}{x^2+x-6}\,dx$

Lösning:

$$\int \frac{1}{x^2+x-6}\,dx \overset{\text{p.b.u.}}{=} \int \frac{1/5}{x-2} - \frac{1/5}{x+3}\,dx = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + C.$$

(b) $\int_0^\infty x^5 e^{-x^3}\,dx$

Lösning:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^5 e^{-x^3}\,dx &= -\frac{1}{3}\int_0^\infty \underset{\downarrow}{x^3}\overbrace{\left(-3x^2e^{-x^3}\right)}^{\uparrow}\,dx \overset{p.i.}{=}\\ &= \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{3}[x^3e^{-x^3}]_0^t + \frac{1}{3}\int_0^\infty 3x^2e^{-x^3}\,dx =\\ &=(0-0) - \lim_{t\to\infty}\frac{1}{3}[e^{-x^3}]_0^t = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

5. Lös diffekvationen

(a) $2x^2y' + xy = 2$

Lösning:

Detta är en första ordningens differentialekvation som kan skrivas om till formen $y' + f(x)y = g(x)$.

$$2x^2y' + xy = 2 \implies y' + \frac{1}{2x}y = \frac{1}{x^2} \text{ om } x \neq 0$$

Finner att då $f(x) = \frac{1}{2x}$ och därmed $F(x) = \frac{1}{2}\ln x = \ln\sqrt{x}$ så har vi en integrerande faktor $e^{\ln\sqrt{x}} = \sqrt{x}$. Finner då att

$$(\sqrt{x}y)' = \sqrt{x}\frac{1}{x^2} \implies \sqrt{x}y = \int x^{-\frac{3}{2}} = -2x^{-\frac{1}{2}} + C$$

Löser ut y genom att dividera med $\sqrt{x}$ och får då att

$$y = -(2/x) + C/\sqrt{x} \text{ där } x \neq 0.$$

(b) $y'' + y' - 6y = 0$, där $y(0) = 6$ och $y'(0) = 7$.
Lösning:
Detta är en linjär differentialekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter. Vi tar därför fram den karakteristiska ekvationen $r^2 + r - 6 = 0$ som vi ser har lösningarna $r_1 = 2$ och $r_2 = -3$. Vi vet då att den generella lösningen för differentialekvationen ges av

$$y = Ae^{2x} + Be^{-3x}.$$

Använder nu begynnelsevilkorna som ges att

$$\begin{cases} 6 = y(0) = A + B \\ 7 = y'(0) = 2A - 3B \end{cases}$$

Detta linjära andragradssystem har lösningar $A = 5$ och $B = 1$. Lösningen till uppgiften är därför

$$y = 5e^{2x} + e^{-3x}.$$

6. Låt $f(x) = x^{\frac{2}{3}} \cdot \ln(x)$.

(a) Finn intervall där funktionen är växande/avtagande samt eventuella lokala max- och min-punkter. 3 p
Lösning:
För detta tar vi fram derivatan

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \ln x + x^{\frac{2}{3}}\frac{1}{x} = x^{-\frac{1}{3}}(\frac{2}{3}\ln x + 1)$$

Ser att derivatan blir noll endast då andra faktorn, dvs parantesen, blir noll. Finner att

$$\frac{2}{3}\ln x + 1 = 0 \implies \ln x = -\frac{3}{2} \implies x = e^{-\frac{3}{2}}$$

Eftersom $f'(x) < 0$ för $0 < x < e^{-\frac{3}{2}}$ är $f(x)$ avtagande på intervallet $(0, e^{-\frac{3}{2}})$ och växande på intevallet $(e^{-\frac{3}{2}}, \infty)$ eftersom $f'(x) > 0$ då $x > e^{-\frac{3}{2}}$.

(b) Finn intervall där funktionen är konkav/konvex och ange eventuella inflektionspunkter. 3 p
Lösning:
Tar fram andraderivatan

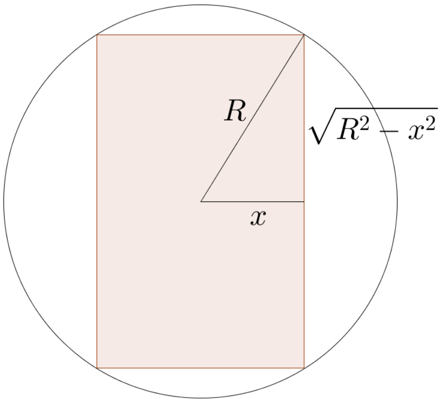
$$f''(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}(\frac{2}{3}\ln x + 1) + x^{-\frac{1}{3}}(\frac{2}{3x}) = x^{-\frac{4}{3}}(-\frac{2}{9}\ln x - \frac{1}{3} + \frac{2}{3})$$

Denna blir noll endast om andra faktorn, dvs parantesen, blir noll, dvs då

$$0 = -\frac{2}{9}\ln x + \frac{1}{3} \implies \ln x = \frac{3}{2} \implies x = e^{\frac{3}{2}}$$

För $0 < x < e^{\frac{3}{2}}$ är $f''(x) > 0$ dvs $f(x)$ konvex på intervallet $(0, e^{\frac{3}{2}})$ och konkav på intevallet $(e^{\frac{3}{2}}, \infty)$ eftersom $f''(x) < 0$ då $x > e^{\frac{3}{2}}$.

7. Finn volymen av den största cylinder som kan rymmas i en sfär med radie R. 7 p
Lösning:
Antag att cylindern har radie $x < R$. Pytagoras sats ger att halva cylinderns höjd ges av $\sqrt{R^2 - x^2}$.



Alltså blir cylinderns volym

$$V_c(x) = r^2 \pi h = x^2 \pi 2\sqrt{R^2 - x^2} = 2\pi\sqrt{R^2x^4 - x^6}$$

Vi söker maximum för denna på det slutna intervallet $[0, R]$ och tar därför fram derivatan

$$V_c'(x) = \frac{\pi}{\sqrt{R^2x^4 - x^6}}(4R^2x^3 - 6x^5) = \frac{\pi}{\sqrt{R^2x^4 - x^6}}(4R^2 - 6x^2)x^3$$

Derivatan är noll då $x = 0$ samt då $4R^2 - 6x^2$ d v s då $x = \sqrt{\frac{2}{3}}R$. Då två ändpunkterna $x = 0$ och $x = R$ kommer att ge volymen 0, dvs lokala minima medan $x = \sqrt{\frac{2}{3}}R$ kommer att ge det lokala maximat

$$V_c(\sqrt{\frac{2}{3}}R) = 2\pi\sqrt{R^2(\sqrt{\frac{2}{3}}R)^4 - (\sqrt{\frac{2}{3}}R)^6} = 2\pi\sqrt{(\frac{2}{3})^2R^6 - (\frac{2}{3})^3R^6} = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

Vilket intressant nog är klotets volym multiplicerat med en faktor $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ännu lite kortare lösning blir det om man istället uttrycker x i h med hjälp av pytagoras sats eftersom man då får en kvadratrot som kvadreras i cylinderns volymfunktion.

En tredje elegant väg är att sätta en vinkel i centrum och se att $x = R\cos\alpha$ och $h = 2R\sin\alpha$ så att volymfunktionen blir en funktion i α.

8. En cirkelskiva med centrum i $(R, 0)$ och med radien r, där $R > r > 0$, roteras ett varv kring y-axeln och genererar på så sätt en så kallad torus. Beräkna volymen av denna rotationskropp.
Lösning:

Den snabbaste lösningen ges av Pappus sats. Cirkeln har area $r^2\pi$ a.e. Vi ser också av symmetriskäl att cirkeln har sin tyngdpunkt i centrum, dvs i punkten $(R, 0)$. Vägen som tyngdpunkten färdas runt y-axeln är $2\pi R$ l.e.. Pappus sats ger då att volymen är $r^2\pi \cdot 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R$ v.e..

En alternativ lösning är att använda skalmetoden och teckna volymen som

$$V = 2\int_{R-r}^{R+r} 2\pi x\sqrt{r^2 - (x-R)^2}dx$$

och sedan göra substitutionen $t = x - R, dx = dt, x = R + r \implies t = r, x = R - r \implies t = -r$ som ger

$$V = 4\pi\int_{-r}^{r}(t+R)\sqrt{r^2 - t^2}dt = 4\pi\int_{-r}^{r} t\sqrt{r^2 - t^2}dt + 4\pi\int_{-r}^{r} R\sqrt{r^2 - t^2}dt = 8\pi\int_{0}^{r} R\sqrt{r^2 - t^2}dt$$

eftersom den första integranden är udda och den andra jämn. I den återstående integralen gör vi nu substitutionen $t = r\sin\alpha, dt = r\cos\alpha\, d\alpha, t = 0 \implies \alpha = 0, t = r \implies \alpha = \frac{\pi}{2}$. Detta ger

$$V = 8\pi R\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\alpha \cdot r\cos\alpha\, d\alpha = 8\pi Rr^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\alpha\, d\alpha = 8\pi Rr^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(\cos 2\alpha + 1)\, d\alpha =$$

$$= 4\pi Rr^2\left[\frac{1}{2}\sin 2\alpha + \alpha\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi Rr^2\frac{\pi}{2} = 2\pi^2 Rr^2$$

7 p