MATEMATIK **Hjälpmedel: inga**

Chalmers tekniska högskola Datum: 160116 kl. 14.00 - 18.00

Tentamen Telefonvakt: Jonny Lindström

0733 607040

LMA400 Matematisk Analys

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2015 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (15p)

2. (a) Bevisa formeln för partiell integration (3p)

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

(b) Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området som begränsas av kurvan $y = \dfrac{1}{x^2}$ samt linjerna $y = 1$ och $y = e$ får rotera ett varv kring $y-$ axeln. Rita figur! (3p)

3. (a) Formulera medelvärdessatsen för derivator. Använd sedan denna till att bevisa att om en funktion är definierad på ett intervall och har en derivata som är positiv (på hela intervallet) så är funktionen strängt växande. (4p)

(b) Visa att $f(x) = \arcsin x + \arccos x$, $x \in [-1, 1]$ är en konstant funktion. (2p)

4. Funktionen $f(x) = \dfrac{x^3}{x^4 - 1}$ är given.

(a) Undersök om f har några asymptoter. (2p)

(b) Undersök om f har några lokala extrempunkter. (2p)

(c) Skissera grafen till f. (2p)

5. På ena sidan av en vägg finns en strålningskälla med intensiteten I_0. Väggen är x cm tjock och absorberar strålning. På andra sidan väggen har strålningsintensiteten sjunkit till I, där funktionen I är en lösning till differentialekvationen

$$\frac{dI}{dx} = -\mu I$$

,där $\mu > 0$ är en absorptionskoefficient.

a) Bestäm funktionen $I(x)$.

b) En 1 cm tjock vägg absorberar 50 procent av intensiteten. Ge ett förenklat uttryck för funktionen $I(x)$, samt skissera funktionens graf.

c) Hur tjock ska väggen vara för att absorbera $87,5$ procent av intensiteten. (5p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar. (Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Alla lösningar till differentialekvationen $y' = x(x^2 + y^2)$ har ett lokalt minimum där $x = 0$. (2p)

(b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} = \frac{1}{2}$. (2p)

7. En plåtskiva har formen av en rektangel med diagonalen 1 dm. rektangeln böjs till en rak cirkulär cylinder. Bestäm cylinderns maximala volym. (4p)

8. Bestäm för vilket värde på konstanten C som integralen

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{C}{x+1}\right) dx$$

kovergerar. Beräkna sedan integralen för det erhållna värdet på konstanten C. (4p)

Lycka till!
Jonny L

Anonym kod	LMA400 Matematisk Analys 160116	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna derivatan av $((f(x))^2 - 1)^2$ i punkten $x = 2$, då $f(2) = 2$, $f'(2) = 3$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna integralen $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+5x+6}\,dx$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \dfrac{\cos x}{1-\cos^2 x}$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Lös differentialekvationen $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x(\arctan x + \frac{\pi}{2})$. (3p)

Lösning:

Svar: ....