MATEMATIK **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola Datum: 160825 kl. 14.00–18.00
Tentamen Telefonvakt: ?
?

LMA400 Matematik

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2014 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (16p)

2. Låt $f(x) = x^4$.

(a) Beräkna översumman av $f(x)$ på intervallet $[-1, 1]$ med steglängd $\Delta x = 1/2$. (2p)
Lösning:

översumman $S_{1/2} = \frac{1}{2}(f(-1) + f(-1/2) + f(1/2) + f(1)) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + 1) = \frac{17}{16}$.

(b) Beräkna undersumman av $f(x)$ på samma intervall och med samma steglängd som ovan. (2p)
Lösning:

Undersumman $s_{1/2} = \frac{1}{2}(f(-1/2) + f(0) + f(0) + f(1/2)) = \frac{1}{2}(\frac{1}{16} + 0 + 0 + \frac{1}{16}) = \frac{1}{16}$.

3. Beräkna

$$\int_1^2 \frac{1+x}{2x+x^3}dx.$$

(5p)

Lösning:

$$\frac{1+x}{2x+x^3} = \frac{1+x}{x(2+x^3)} = \frac{a}{x} + \frac{bx}{2+x^2} + \frac{c}{2+x^2}$$

där a, b, cÊuppfyller ekvationerna $a + b = 0$, $c = 1$, $2a = 1$, dvs $a = 1/2$ och $b = -1/2$. Den sökta integralen är alltså summan av de tre integralerna

$$\int_1^2 \frac{1}{2x}dx = \left[\frac{\ln x}{2}\right]_1^2,$$

$$\int_1^2 \frac{-x/2}{2+x^2}dx = -\frac{1}{4}\int_1^2 \frac{2x}{2+x^2}dx = -\frac{1}{4}\left[\ln(2+x^2)\right]_1^2$$

och

$$\int_1^2 \frac{1}{2+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{1+(x/\sqrt{2})^2}dx = \left[\begin{array}{c} y = x/\sqrt{2} \\ dy = dx/\sqrt{2} \\ x = 1 \Rightarrow y = 1/\sqrt{2} \\ x = 2 \Rightarrow y = \sqrt{2} \end{array}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{1+y^2}dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan y\right]_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$

så den sökta integralen är

$$\frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 6 - \ln 3}{4} + \frac{\arctan\sqrt{2} - \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\ln 2}{4} + \frac{\arctan\sqrt{2} - \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}.$$

4. Hitta $y(x)$ så att $y'' - y' - 2y + x = 0$, $y(0) = 3/4$ och $y(1) = e^2 + 1/4$. (5p)

Lösning:

Karaktäristiskt polynom $r^2 - r - 2 = 0$ har lösningar $r = 2$ och $r = -1$, så lösningen till den homogena ekvationen ges av $y_h = Ce^{2x} + De^{-x}$. Ansätter vi $y_p = a + bx$ får vi att $-2a - b = 0$ och $-2b = -1$ dvs $b = 1/2$ och $a = -1/4$. Alltså är $y = Ce^{2x} + De^{-x} - 1/4 + x/2$. Dessutom är $3/4 = C + D - 1/4$ och $0 = Ce^2 + De^{-1} + 1/4$. Detta linjära ekvationssystem har lösningen $D = 1$ och $C = 0$. Alltså är $y = e^{-x} - 1/4 + x/2$.

5. Låt $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-2}$.

(a) Ange alla assymptoter till funktionen. (3p)

Lösning:

En lodrät assymptot $x = 2$. Dessutom är $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = 1$ så vi bör kolla om vi har en sned assymptot $y = x + m$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 + x - 2 - x^2 + 2x}{x - 2} = 3,$$

så vi har assymptoten $y = x + 3$.

(b) Ange eventuella lokala extrempunkter. (2p)

Lösning:

$f'(x) = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$ så $f'(x) = 0 \iff x = 0$ eller $x = 4$. Eftersom $f'(x)$ är definierad där $f(x)$ är definierad, är alltså de enda kandidaterna till lokala extrempunkter $(0, f(0)) = (0, 1)$ och $(4, f(4)) = (4, 9)$. Vi kollar lätt att det förra är en lokal maximipunkt och det senare en lokal minimipunkt.

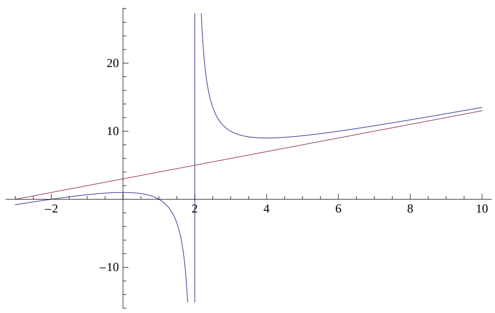
(c) På vilka intervall är $f(x)$ konvex respektive konkav? (2p)

Lösning: $f''(x) = \frac{8}{(x-2)^3}$ så $f''(x) \neq 0$. Vi kollar två enskilda punkter, exempelvis

$x = 0$ och $x = 4$, för att konstatera att $f''(x) < 0$ på $(-\infty, 2)$ och $f''(x) > 0$ på $(2, \infty)$. Alltså är f konkav på det förra intervallet och konvex på det senare.

(d) Skissa grafen för $f(x)$ Rita även ut assymptoterna. (1p)

Lösning:



VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

6. Formulera och bevisa analysens huvudsats del 1. (6p)

Lösning:

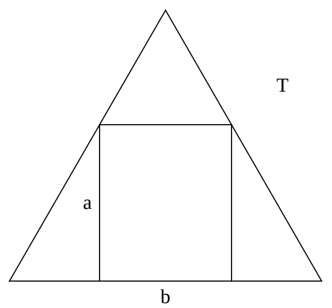
Se boken.

7. Skriv $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{2+j/n}{n}$ som en integral. (2p)

Lösning:

En tänkbar integral är $\int_2^3 x\,dx$. Steglängden Δx är då $1/n$ och punkterna på intervallet som funktionsvärdet kollas på är $1+j/n$, $1\le j\le n$.

8. Låt T vara den liksidiga triangeln med sidlängd 1. Bestäm a och b i figuren så att rektangelns area blir maximal. (4p)

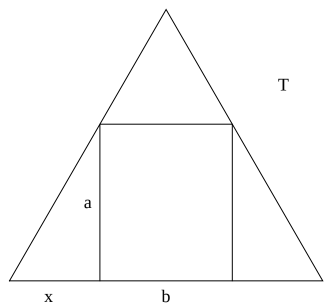


Lösning:

Låt x vara avståndet mellan triangelns hörn och rektangeln enligt figuren nedan. Då är $1=b+2x$ så $b=1-2x$. Vidare är $a/x=\tan(\pi/3)=\sqrt{3}$ så $a=\sqrt{3}x$. Alltså ges rektangelns area av

$$f(x)=ab=\sqrt{3}(x-2x^2).$$

$f(x)$ är definierad på $(0,1/2)$ och $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 1/2}f(x)=0$. Globalt maximum måste alltså vara ett lokalt maximum som endast kan antas i den enda stationära punkten $x=1/4$. Det betyder att $a=\sqrt{3}/4$ och $b=1/2$.



Lycka till!
Jonny

Anonym kod	LMA400 Matematik 160825	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

(3p)

Lösning:

Partiell integration ger oss att

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1/x}{x} dx = -\frac{\ln 2}{2} + [-1/x]_1^2 = \frac{1 - \ln 2}{2}.$$

(b) Beräkna (3p)

$$\int_0^\pi \sin^3 x dx.$$

Lösning:

$\sin^3 x = (1 - \cos^2 x)\sin x$ så integralen är summan av

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -(-1) + 1 = 2$$

och

$$\int_0^\pi -\cos^2 x \sin x dx = \left[\begin{array}{c} y = \cos x \\ dy = -\sin x dx \\ x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = \pi \Rightarrow y = -1 \end{array}\right] = \int_1^{-1} y^2 dy = [y^3/3]_1^{-1} = -1/3 - 1/3 = -2/3.$$

Alltså är integralen lika med $2 - 2/3 = 4/3$.

(c) Beräkna den generaliserade integralen $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+3x+5/2} dx$ eller visa att den inte konvergerar. (3p)

Lösning: $x^2+2x+5/2 = (x+3/2)^2 - 9/4 + 5/2 = (x+3/2)^2 + 1/4 = ((2x+3)^2+1)/4.$

Variabelbytet $2x + 3 = u$ gör alltså att vi kan skriva om integralen i uppgiften till

$$\int_3^\infty \frac{1}{(u^2+1)/4} \frac{du}{2} = \int_3^\infty \frac{2}{u^2+1} du = \lim_{R\to\infty} \int_3^R \frac{2}{u^2+1} du = 2 \lim_{R\to\infty} [\arctan(u)]_3^R = 2(\pi/2 - \arctan(3)).$$

(d) Låt K vara det område i planet som begränsas av kurvan $y = 2e^x$ och linjerna $y = 0$, $x = -1$ och $x = 1$. Beräkna volymen av den kropp som bildas när K roterar kring x-axeln. (3p)

Lösning: Volymen ges av integralen $\int_{-1}^1 \pi 4e^{2x} dx = 2\pi[e^{2x}]_{-1}^1 = 2\pi(e^2 - e^{-2})$.

(e) Hitta den funktion $y(x)$ som uppfyller $yx - y + y' = 0$ och $y(1) = e$. (4p)

Lösning:

För några $C, D \in \mathbb{R}$, $D \neq 0$, har vi att

$$yx - y + y' = 0 \iff y'/y = 1 - x \iff \int \frac{dy}{y} = \int (1-x) dx \iff \ln|y| = x - x^2/2 + C \iff y = De^{x - x^2/2}.$$

Dessutom är $e = y(1) = De^{1/2}$ så $D = e/e^{1/2} = e^{1/2}$. Alltså är $y = e^{1/2 + x - x^2/2}$.