1. Se Stewart s. 394 – 395 och 396 – 397.

2. (a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\underbrace{\sqrt{4x^2+2}}_{\to\infty} - \underbrace{2x}_{\to\infty}\right)$ = förläng med konjugat

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{4x^2+2}-2x)(\sqrt{4x^2-2}+2x)}{\sqrt{4x^2+2}+2x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+2-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+2}+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\underbrace{\sqrt{4x^2+2}+2x}_{\to\infty}} = \underline{\underline{0}}$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{1/\sin(x)} = \lim\limits_{x\to 0+} \left(e^{\ln(x)}\right)^{1/\sin(x)}$

$$= \lim_{x\to 0+} e^{\ln(x)/\sin(x)} \quad (*)$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)\}\to -\infty}{\underbrace{\sin(x)}_{\to 0}} = -\infty \quad (**)$$

(**) i (*) ger $\lim\limits_{x\to 0+} x^{1/\sin(x)} = \lim\limits_{y\to -\infty} e^{y} = \underline{\underline{0}}$.

3(a) $$\int \frac{x^3}{x^3+x^2+x+1}\,dx = \int \frac{x^3+x^2-x^2+x-x+1-1}{x^3+x^2+x+1}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1} - \frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1}\right)dx$$

$$= \int \left(1 - \frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1}\right)dx \quad (*)$$

Partialbråksuppdelning

$$\frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1} = \frac{x^2+x+1}{(x+1)\underbrace{(x^2+1)}_{\text{saknar reella rötter}}} =! \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$\Longleftrightarrow A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1) = x^2+x+1$

$x=-1$: $2A + 0\cdot B + 0\cdot C = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

$x=0$: $1A + 0\cdot B + 1\cdot C = 0^2+0+1 = 1 \Rightarrow C = 1 - A = \frac{1}{2}$

$x=1$: $2A + 2B + 2C = 1^2+1+1 = 3 \Rightarrow B = \frac{3-2A-2C}{2} = \frac{1}{2}$

så $\dfrac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x+1}{x^2+1}$ vilket

i (*) ger

3(a, forts.)

$$\int \frac{x^3}{x^3+x^2+x+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \int 1\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= x - \frac{1}{2}\ln(|x+1|) - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\arctan(x)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{I den kvarvarande integralen:} \\ u = x^2,\ du = \frac{du}{dx}dx = 2x\,dx \iff x\,dx = \frac{1}{2}du \end{array} \right\}$$

$$= x - \frac{1}{2}\ln(|x+1|) - \frac{1}{4}\int \frac{1}{u+1}\,du - \frac{1}{2}\arctan(x)$$

$$= x - \frac{1}{2}\ln(|x+1|) - \frac{1}{4}\ln(|u+1|) - \frac{1}{2}\arctan(x) + C$$

$$= x - \frac{1}{2}\ln(|x+1|) - \frac{1}{4}\ln(|x^2+1|) - \frac{1}{2}\arctan(x) + C$$

$$= x - \frac{1}{2}\ln(|x+1|) - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\arctan(x) + C$$

$$= x - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}}\right) - \frac{1}{2}\arctan(x) + C$$

$$= x - \ln\left(\sqrt{\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}}}\right) - \frac{1}{2}\arctan(x) + C$$

$$= \ldots$$

många likvärdiga alternativ.

3(b) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$ är <u>divergent</u>. Integranden är diskontinuerlig i $x=0$, så integralen bör beräknas som $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to 0-}\int_{-1}^{b}\frac{1}{x}\,dx + \lim_{a\to 0+}\int_{a}^{1}\frac{1}{x}\,dx$, men $\int_{-1}^{b}\frac{1}{x}\,dx = \ln(|b|) - \ln(|-1|) = \ln(|b|) \longrightarrow -\infty$ då $b \longrightarrow 0-$ och $\int_{a}^{1}\frac{1}{x}\,dx = \ln(1) - \ln(|a|) = -\ln(|a|) \longrightarrow \infty$ då $a \longrightarrow 0+$, det vill säga, båda halvorna av integralen är divergenta.

3(c) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^2\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sin(\pi)}{4}\right) - \left(\frac{0}{2} - \frac{\sin(0)}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - 0 - 0 + 0 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}.$$

4(a) $y''(t) + y'(t) + y(t) = 0$ har karakteristisk ekvation

$$k^2 + k + 1 = 0 \iff k = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

svarande mot allmän lösning

$$y(t) = Ae^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + Be^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

$$y(0) = 0 \Longrightarrow A\underbrace{e^0\sin(0)}_{=1\cdot 0=0} + B\underbrace{e^0\cos(0)}_{=1\cdot 1=1} = 0 \Longrightarrow B = 0$$

så $y(t) = Ae^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \Longrightarrow y'(t) = A\left(-\frac{1}{2}e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$

$$y'(0) = 1 \Longrightarrow A\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot e^0\sin(0) + \frac{\sqrt{3}}{2}e^0\cos(0)\right) = 1$$

$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}A = 1 \Longrightarrow A = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Svar: $y(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

4(b) $y'(x) + f(x)y(x) = f(x)$ har integrerande faktor

$e^{\int f(x)dx} = e^{F(x)}$ där F är en primitiv funktion till f.

Vi får, efter multiplikation med $e^{F(x)}$,

$$e^{F(x)}y'(x) + \underbrace{e^{F(x)}f(x)}_{=(e^{F(x)})'}y(x) = \underbrace{e^{F(x)}f(x)}_{(e^{F(x)})'}$$

$$\iff$$

$$\left(e^{F(x)}y(x)\right)' = \left(e^{F(x)}\right)'$$

Integrera ledvis

$$\int\left(e^{F(x)}y(x)\right)'dx = \int\left(e^{F(x)}\right)'dx \iff e^{F(x)}y(x) = e^{F(x)} + C$$

$$\iff y(x) = \underline{1 + Ce^{-F(x)}}$$

4(c) $-\frac{y(x)^2}{y'(x)} = 1+x \iff -\frac{1}{y(x)^2}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x}$

$\iff -\int \frac{1}{y(x)^2}\frac{dy}{dx}\,dx = \int \frac{1}{1+x}\,dx \iff \int\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy = \int \frac{1}{1+x}\,dx$

$\iff \frac{1}{y} = \ln(|1+x|) + C \iff y(x) = \frac{1}{\ln(|1+x|)+C}$

$y(0) = 1 \implies \frac{1}{\underbrace{\ln(|1+0|)}_{=\ln(1)=0} + C} = 1 \implies C = 1.$

Svar: $y(x) = \frac{1}{\ln(|1+x|)+1}$.

---

5 Största och minsta värde antas antingen där $f'(x)=0$, där $f'(x)$ ej är definierad, eller i ändpunkter på intervallet, eftersom $f(x) = xe^{-x^2+x}$ är kontinuerlig (polynom och exponentialfunktioner är kontinuerliga).

$f'(x) = (xe^{-x^2+x})' = (x)'e^{-x^2+x} + x(e^{-x^2+x})'$

$= 1\cdot e^{-x^2+x} + x\cdot(-x^2+x)'e^{-x^2+x}$

$= (1-2x^2+x)e^{-x^2+x}$

f' är definierad för alla $x \in (0,2]$. Vi söker punkter där

$f'(x) = 0 \iff (1-2x^2+x)\underbrace{e^{-x^2+x}}_{\neq 0} = 0 \iff 1-2x^2+x = 0$

$\iff x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \iff x = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$ alltså $x = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \notin (0,2]$

resp. $x = \frac{4}{4} = 1 \in (0,2]$.

Så $x = 1$ är en möjlig punkt för största/minsta värde.

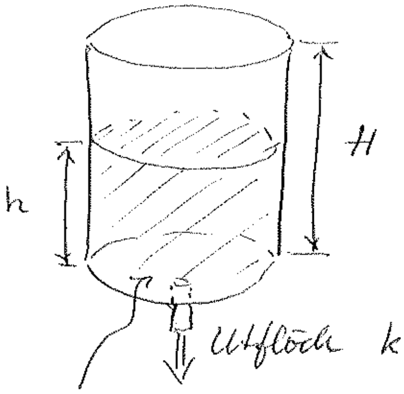
Återstår randpunkterna: $f(2) = 2e^{-2^2+2} = 2e^{-2}$

(då $0 \notin (0,2]$) $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} xe^{-x^2+x} = 0\cdot e^0 = 0$

och $f(1) = 1\cdot e^{-1^2+1} = 1$.

Eftersom $0 < 2e^{-2} < 1$ är största värdet 1 (i $x=1$), men minsta värde antas ej då $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$, och $f(x) > 0$ då $x \in (0,2]$.

6. Sluss



Utflöde $k\sqrt{h}$, $k = 5\,dm^{5/2}/min$

Basarea $A = 2\,dm^2$
Volym $V = 8\,l = 8\,dm^3$
$\Rightarrow H = \frac{8}{2} = 4\,dm$

Vi söker ett uttryck för $h(t)$.

Kedjeregeln ger: $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}$

Volymen: $V = Ah \Rightarrow \frac{dV}{dh} = A$

Givna utflödet: $\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{h}$

utflöde, volymen minskar

$\Rightarrow -k\sqrt{h} = A\frac{dh}{dt}$ (*)

(*) är en separabel differentialekvation. Vi löser:

$$-k\sqrt{h} = A\frac{dh}{dt} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{h}}\frac{dh}{dt} = -\frac{k}{A}$$

Integrera m.a.p. t: $\int \frac{1}{\sqrt{h}}\frac{dh}{dt}\,dt = -\int \frac{k}{A}\,dt$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{\sqrt{h}}\,dh = -\int \frac{k}{A}\,dt \Leftrightarrow 2\sqrt{h} = -\frac{k}{A}t + C$$

$$\Leftrightarrow h(t) = \left(D - \frac{k}{2A}t\right)^2, \quad D = \frac{C}{2}$$

Tanken är full vid $t = 0$, så $h(0) = H \Leftrightarrow D = \sqrt{H}$

så $h(t) = \left(\sqrt{H} - \frac{k}{2A}t\right)^2$.

Tanken är tömd när $h(t) = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{H} - \frac{k}{2A}t\right)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{H} - \frac{k}{2A}t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2A\sqrt{H}}{k} = \frac{2\cdot 2\cdot\sqrt{4}}{5} = \frac{8}{5} = 1.6\ \text{min.}$$

7(a) Låt $F(t) = \int e^{t^2}\,dt$ (vi hittar ingen enkel formel, men det behövs ej).

Kedjeregeln och analysens huvudsats ger:

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{\sin(x)} e^{t^2}\,dt = \frac{d}{dx}\Big(F(\sin(x)) - F(x^2)\Big)$$

$$= F'(\sin(x))\,(\sin(x))' - F'(x^2)\,(x^2)' = \left\{F'(t) = e^{t^2}\right\}$$

$$= e^{\sin(x)^2}\cos(x) - e^{(x^2)^2}\cdot 2x$$

$$= \underline{\underline{\cos(x)e^{\sin(x)^2} - 2x e^{x^4}}}$$

(b) Vi generaliserar beräkningen från (a):

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = \left\{F(t) := \int f(t)\,dt\right\}$$

$$= \frac{d}{dx}\Big(F(b(x)) - F(a(x))\Big) = F'(b(x))b'(x) - F'(a(x))a'(x)$$

$$= \left\{F'(t) = f(t)\right\} = \underline{\underline{f(b(x))b'(x) - f'(a(x))a'(x)}}\,.$$