

LMA400 – Matematisk analys

Tentamen: 2018-04-04, 14.00–18.00

Telefonvakt: Samuel Bengmark, 031-772 5302

Hjälpmedel: Inga

Betygsgränser: 20 poäng – 3, 30 poäng – 4, 40 poäng – 5, 50 poäng totalt

Observera: Beräkningar och motiveringar ska redovisas. Endast svar ger ingen poäng om inte annat anges.

TEORI

1. Visa båda delarna av Analysens huvudsats, alltså

(a) att derivatan med avseende på övre integrationsgränsen av en integral är integranden själv, och (8p)

(b) att en definit integral kan beräknas som en differens av värden av vilken primitiv funktion som helst till integranden. (2p)

RÄKNING

2. Beräkna gränsvärdena

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 2} - 2x)$, (2p)

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/\sin(x)}$. (2p)

3. Beräkna, eller förklar varför man inte kan beräkna, följande integraler:

(a) $\int \frac{x^3}{x^3 + x^2 + x + 1} dx$ (4p)

(b) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$, (2p)

(c) $\int_0^{\pi/2} \cos(x)^2 dx$. (2p)

4. Lös

(a) begynnelsevärdesproblemet $y''(t) + y'(t) + y(t) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, (3p)

(b) differentialekvationen $y'(x) + f(x)y(x) = f(x)$ där f är en given integrerbar funktion (tips: låt F vara en primitiv funktion till f), (3p)

(c) begynnelsevärdesproblemet $-\frac{y(x)^2}{y'(x)} = 1 + x$, $y(0) = 1$. (3p)

5. Bestäm största och minsta värde för $f(x) = xe^{-x^2+x}$ då $x \in (0, 2]$. (4p)

Var god vänd!

PROBLEMLÖSNING

6. En dricksvattenbehållare som rymmer 8 liter vatten har formen av en cylinder med basarea 2 kvadratdecimeter. I botten av tanken finns en kran, som när den öppnas låter vattnet flöda i en takt $k\sqrt{h}$ där h är vattenytans höjd över tankens botten och $k = 5 \text{ dm}^{5/2}/\text{minut}$ är en konstant. Hur lång tid tar det innan tanken är tömd om kranen öppnas när tanken är full? (7p)

7. (a) Beräkna

$$\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{\sin(x)} e^{t^2} dt.$$

Tips: Du kan inte hitta en enkel formel för den primitiva funktionen till e^{t^2} . (4p)

(b) Mer allmänt: härled en formel för

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt$$

där a och b är deriverbara funktioner, och f är kontinuerlig. (4p)

Lycka till! //John