Matematik — Hjälpmedel: Inga
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen 2017-01-13 kl. 14:00–18:00
Telefonvakt: Torbjörn Lundh telefon.: 031-772 3503
Betygsgränser 3:a 20 poäng, 4:a 30 poäng, 5:a 40 poäng, max: 50 poäng

Lösningsförslag till Matematisk analys — LMA400

OBS: Tänk på att det huvudsakligen är beräkningar och motiveringar som ger poäng!

Teori

1. Bevisa att $f'(x) > 0$ på ett intervall så är $f(x)$ växande där.

Lösning:
Se sida 293 i Stewart.

2. Bevisa den andra delen av Integralkalkylens huvudsats, dvs att om f är kontinuerlig på $[a, b]$, så gäller att $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, där $F' = f$.

Lösning:
Se sida 396 i Stewart.

Problem

3. Beräkna följande gränsvärden

a) $\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^4+5x}{(x^2-2)(x^2+3)}$
Lösning:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^4+5x}{(x^2-2)(x^2+3)} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\cancel{x^4}(1+\overbrace{\tfrac{5}{x^3}}^{\nearrow 0})}{\cancel{x^4}(1-\underbrace{\tfrac{2}{x^2}}_{\searrow 0})\,(1+\underbrace{\tfrac{3}{x^2}}_{\searrow 0})} = \frac{1}{1\cdot 1} = 1$$

b) $\lim_{x\longrightarrow 3} \frac{x^2-9}{(x-3)(x+2)}$
Lösning:

$$\lim_{x\longrightarrow 3} \frac{x^2-9}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\longrightarrow 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}(x+2)} = \frac{6}{5}$$

c) $\lim_{x\longrightarrow\infty} x^{\frac{1}{x}}$
Lösning:
Först gör vi omskrivningen $a^b = e^{\ln(a^b)} = e^{b\ln(a)}$ och finner att

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\longrightarrow\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(x)}.$$

Vi tittar sedan på gränsvärdet för exponentens $\frac{1}{x}\ln(x)$ som är av den indefinita typen $\frac{\infty}{\infty}$. l'Hospitals regel ger att

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{0}{1}=0.$$

Eftersom e^t är en kontinuerlig funktion kan vi nu dra slutsatsen att

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\longrightarrow\infty}e^{\frac{1}{x}\ln(x)}=e^0=1.$$

4. Beräkna följande integraler

(a) $\int\frac{1}{x^2-9}\,dx$
Lösning:
Vi observerar att integranden är en rationell funktion där täljarens grad är lägre än nämnarens. Vi vill därför göra partialbråksuppdelning.

$$\frac{1}{x^2-9}=\frac{1}{(x-3)(x+3)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3}=\frac{(A+B)x+3A-3B}{(x-3)(x+3)}$$

Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases}0= & A+B\\ 1= & 3A-3B.\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}A & =\frac{1}{6}\\ B & =-\frac{1}{6}\end{cases}$$

Vi får därför följande.

$$\int\frac{1}{x^2-9}\,dx=\frac{1}{6}\int\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\,dx=\frac{1}{6}(\ln|x-3|-\ln|x+3|)+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$$

(b) $\int_1^2(x-2)\ln(x)\,dx$
Lösning:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \overbrace{(x-2)}^{\uparrow}\underset{\downarrow}{\ln(x)}\ dx &\overset{p.i}{=}\left[\frac{(x-2)^2}{2}\ln(x)\right]_1^2-\int_1^2\frac{(x-2)^2}{2}\frac{1}{x}\,dx\\
&=\underbrace{\left(\frac{(2-2)^2}{2}\ln(2)\right)}_{=0}-\underbrace{\left(\frac{(1-2)^2}{2}\ln(1)\right)}_{=0}-\int_1^2\frac{x^2-4x+4}{2x}\,dx\\
&=-\int_1^2\frac{x}{2}-2+\frac{2}{x}\,dx\\
&=-\left[\frac{x^2}{4}-2x+2\ln|x|\right]_1^2\\
&=\left(\frac{1^2}{4}-2\cdot 1+2\ln(1)\right)-\left(\frac{2^2}{4}-2\cdot 2+2\ln(2)\right)\\
&=\frac{5}{4}-\ln(4).\end{aligned}$$

5. Lös diffekvationerna

(a) $y'' - 9y = 0$, där $y(0) = 3$ och $y'(0) = 3$.
Lösning:
Detta är en linjär homogen differentialekvation med konstanta koefficienter. Tar fram dess karakterista ekvation och finner dess rötter.

$$r^2 - 9 = 0 \Rightarrow r_1 = 3, r_2 = -3$$

Eftersom vi har två olika lösningar ges den allmänna lösningen till differentialekvationen av

$$y(x) = Ae^{3x} + Be^{-3x}$$

Eftersom vi då har att $y'(x) = 3Ae^{3x} - 3Be^{-3x}$ ger begynnelsevärdena att

$$\begin{cases} 3 = y(0) = A + B \\ 3 = y'(0) = 3A - 3B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \end{cases}$$

Den efterfrågade lösningen är därför $y(x) = 2e^{3x} + e^{-3x}$

(b) $y'' - 9y = \cos^2 x$.
Lösning:
I tillägg till ovanstående gerenella lösning till det homogena problemet, $y_h = Ae^{3x} + Be^{-3x}$, behöver vi en partikulärlösning. För att kunna välja en fungerande ansats skriver vi om högerleder $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$. Vi gör ni två olika ansatser, en för varje term i högerleder.

Högerledet $\frac{1}{2}$: Ansätter $y = k$ och finner att $y'' + y = 0 + 9k = \frac{1}{2} \Longrightarrow k = -\frac{1}{18}$.

Högerleder $\frac{1}{2}\cos(2x)$: Ansätter $y = A\cos(2x)+B\sin(2x)$. Derivering två gånger och insättning ger

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cos(2x) =& y'' - 9y = (-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)) - 9(A\cos(2x) + B\sin(2x)) \\ =& -13A\cos(2x) - 13B\sin(2x)\end{aligned}$$

Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = -13A \\ 0 = -13B \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{26} \\ B = 0 \end{cases}$$

Vi finner därför partikulärlösning $y_2 = -\frac{1}{26}\cos(2x)$

Vi slår nu samman allt och finner att differentialekvationen har lösningarna

$$y = y_h + y_1 + y_2 = Ae^{3x} + Be^{-3x} + \frac{1}{18} - \frac{1}{26}\cos(2x)$$

(c) $y' + \tan(x)y = \tan(x), y(0) = 2$
Lösning:
Detta är en linjär differential ekvation av första ordning som vi alltså löser med integrerande faktor.

$$I(x) = e^{\int \tan x\, dx} = e^{-\ln(\cos x)} = e^{\ln\left((\cos x)^{-1}\right)} = (\cos x)^{-1}$$

Vi tittar nu på derivatan av produkten $y(x) \cdot I(x)$.

$$\left(y(\cos x)^{-1}\right)' = y'(\cos x)^{-1} + y(-1)(\cos x)^{-2}(-\sin x) = (\cos x)^{-1} \underbrace{(y' + \tan(x)y)}_{\text{HL i diffekv.}} = (\cos x)^{-1} \underbrace{\tan(x)}_{\text{VL}}$$

Vi integrerar båda led och finner

$$y(\cos x)^{-1} = \int (\cos x)^{-1} \tan(x)\, dx = (\cos x)^{-1} + C$$

Vi har funnit att $y(x) = 1 + C\cos x$ där vi nu bestämmer C med begynnelsevärdet $2 = y(0) = 1 + C\cos(0) = 1 + C$, dvs $C = 1$. Slutsatsen är att $y(x) = 1 + \cos x$.

6. Beräkna volymen man får när man roterar kurvanstycket $f(x) = \ln(x)$, mellan $x = 1$ och $x = e$, runt x-axeln.
Lösning:
Vi använder skivmetoden där vi får cirkelskivor ortogonala mot x-axeln som vid x har radien $r = \ln x$, dvs skivan får arean $A(x) = r^2\pi = (\ln x)^2\pi$. Vi integrerar dessa från $x = 1$ till $x = e$ och får volymen

$$V = \int_1^e A(x)\, dx = \int_1^e (\ln x)^2 \pi\, dx =$$

$$= \int_1^e (\ln x)^2 \pi\, dx = \begin{pmatrix} u = \ln x & e^u = x \\ du = \frac{dx}{x} & e^u du = dx \\ x = 1 \Rightarrow u = 0 & x = 1 \Rightarrow u = 1 \end{pmatrix}$$

$$= \pi \int_0^1 u^2 e^u\, du = \pi \underbrace{\left[u^2 e^u\right]_0^1}_{=e} - \pi \int_0^1 2ue^u\, du =$$

$$= \pi e - \pi \left(\underbrace{\left[2ue^u\right]_0^1}_{=2e} - \int_0^1 2e^u\, du \right) = -2\pi + \pi \int_0^1 2e^u\, du$$

$$= -e\pi + \pi \left[2e^u\right]_0^1 = -e\pi + 2e\pi - 2\pi = \pi(e - 2)$$

7. En bakteriepopulation modelleras med hjälp av differentialekvationen

$$P'(t) = \frac{1}{2} P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{1000}\right).$$

a) Ge två olika lösningar till differentialekvationen som båda innebär att man har ett konstant antal individer i populationen hela tiden.

Lösning:
Detta inträffar när derivatan är noll dvs när

$$0 = P' = \frac{1}{2}P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{1000}\right)$$

dvs när någon av de två faktorerna $P(t)$ eller $\left(1 - \frac{P(t)}{1000}\right)$ är noll. Vi ser att de två konstanta lösningarna är $P = 0$ och $P = 1000$. Dvs skulle vi hamna i en situation där populationen bestod av 0 eller 1000 individer skulle ingen tillväxt eller något avtagande ske därefter.

b) Argumentera för att vilken populationstorlek man än börjar med, bortsett från de två du gav i a), så har man en monoton utveckling, dvs antingen för evigt växande eller för evigt avtagande populationsstorlek. Var går gränsen mellan de två fallen?
Lösning:
När $0 < P < 1000$ ser vi att

$$P'(t) = \frac{1}{2}\underbrace{P(t)}_{>0}\left(1 - \underbrace{\frac{P(t)}{1000}}_{<1}\right) > 0$$

För sådana värden på P växer populationen upp mot gränsen $P = 1000$. Antalet kan dock aldrig passera 1000 eftersom lösningen där skulle bli konstant.

Pss ser man att om $P > 1000$ kommer

$$P'(t) = \frac{1}{2}\underbrace{P(t)}_{>0}\left(1 - \underbrace{\frac{P(t)}{1000}}_{>1}\right) < 0$$

För sådana värden är antalet avtagande utan att kunna passera $P = 1000$.

c) Avgör för vilka populationstorlekar som populationsgrafen är konvex uppåt respektive konvex neråt.
Lösning:
Vi tar fram $P''(t)$ genom derivering av differentialekvationen. Observera att högerledet är en produkt varför vi använder produktregeln och får:

$$P''(t) = \frac{1}{2}P'(t)\left(1 - \frac{P(t)}{1000}\right) - \frac{1}{2}P(t)\frac{P'(t)}{1000} = \frac{1}{2}P'(t)\left(1 - 2\frac{P(t)}{1000}\right)$$

Denna produkt är noll precis då antingen $P' = 0$ eller $\left(1 - 2\frac{P}{1000}\right) = 0$. Eftersom derivatan enligt b) ovan är noll precis för $P = 0$ och $P = 1000$ och då $\left(1 - 2\frac{P}{1000}\right) = 0$ då $P = 500$ har vi hittar tre nollställen, $P \in \{0, 500, 1000\}$. Vi får tre fall

$0 < x < 500$: P' positivt och faktorn $\left(1 - 2\frac{P}{1000}\right)$ positiv. Alltså är P'' är positiv, dvs grafen är konvex uppåt.

$500 < x < 1000$: P' positivt och faktorn $\left(1 - 2\frac{P}{1000}\right)$ negativ. Alltså är P'' är negativt, dvs grafen är konvex neråt.

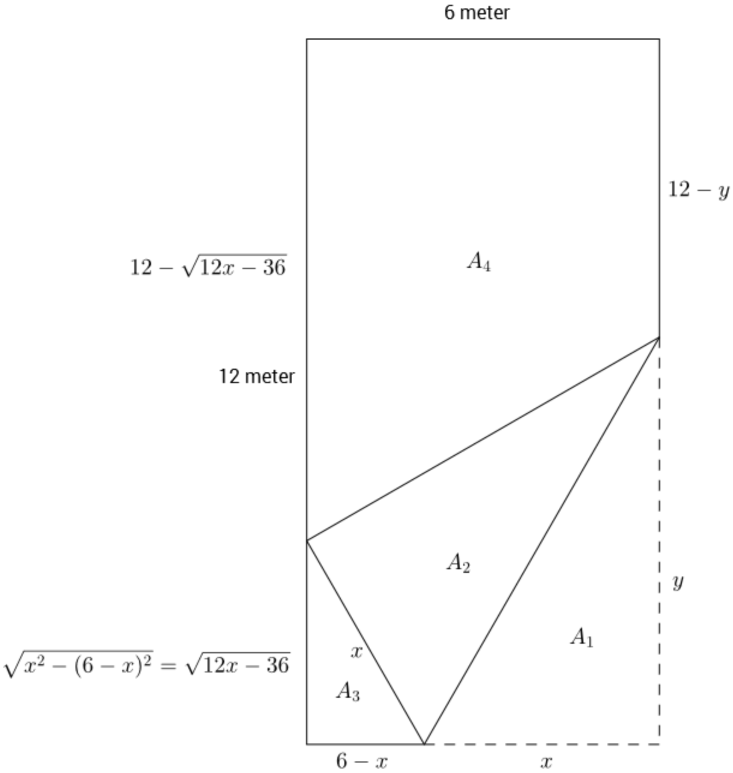
$1000 < x$**:** P' är negativt och faktorn $\left(1 - 2\frac{P}{1000}\right)$ också negativ. Alltså är P'' är positiv, dvs grafen är konvex uppåt.

8. En stor rektangulär duk med bredden 6 meter och höjden 12 meter viks en gång så att nedre högra hörnet precis når någonstans på den vänstra långsidan av duken. Vilken är den kortaste längd som vecket kan få?

Lösning:

vi inför bednämningarna x och y för som längderna på de yttersidor som viks bort, enligt figuren. Sträcken i figure delar in hela området i fyra områden vars kanter kan uttryckas i x och y enligt figuren.

Vi finner nu ett samband mellan x och y genom att summan av de fyra delaran måste sammanfalla med arean av helheten, som ju är $6 \cdot 12 = 72$. Vi finner att



$$\begin{aligned}
72 =& A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \\
=& \frac{xy}{2} + \frac{xy}{2} + \frac{(6-x)\sqrt{12x-36}}{2} + 6\frac{12 - \sqrt{12x-36} + 12 - y}{2} = \\
=& xy + (3 - \frac{x}{2})\sqrt{12x-36} - 3\sqrt{12x-36} + 72 - 3y = \\
=& (x-3)y + \frac{x}{2}\sqrt{12x-36} + 72.
\end{aligned}$$

Vi löser ut y och finner att

$$y = \frac{\frac{x}{2}\sqrt{12x-36}}{x-3} = \frac{x\sqrt{12x-36}}{2(x-3)}$$

Längden av vecket ges nu av funktionen.

$$\begin{aligned}
\ell(x) =& \sqrt{x^2+y^2} = \\
=& \sqrt{x^2 + \left(\frac{x\sqrt{12x-36}}{2(x-3)}\right)^2} = \\
=& \sqrt{x^2 + \frac{x^2(12x-26)}{4(3-x)^2}} = \\
=& \sqrt{x^2 + \frac{3x^2}{x-3}}
\end{aligned}$$

Vi söker minimum för $\ell(x)$ genom att ta fram stationära punkter.

$$\begin{aligned}
0 = \ell'(x) = 0.5\left(x^2 + \frac{3x^2}{x-3}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(2x + \frac{(x-3)6x - 3x^2}{(x-3)^2}\right) = \\
= \frac{2x + \frac{3x^2-18x}{(x-3)^2}}{2\sqrt{x^2 + \frac{3x^2}{x-3}}}
\end{aligned}$$

Detta implicerar att täljaren är noll dvs

$$\begin{aligned}
0 =& x\left(2 + \frac{3x-18}{(x-3)^2}\right) = \\
=& x\frac{2(x-3)^2 + 3x - 18}{(x-3)^2} = \\
=& x\frac{x(2x-9}{(x-3)^2} =
\end{aligned}$$

Vi har hittat stationära punkter $x_1 = 0$ och $x_2 = \frac{9}{2}$. Vi måste jämföra resultaten för ändpunkterna $x = 3$ och $x = 6$. Vi finner att minimum uppstår vid $x = \frac{9}{4}$ och att då är $ell(\frac{9}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2} \approx 7.8$ meter.