

MATEMATIK

Hjälpmedel: Inga

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

Tentamen 2017-04-10 kl. 14:00–18:00

Telefonvakt: Samuel Bengmark telefon.: 031-772 5302

Betygsgränser 3:a 20 poäng, 4:a 30 poäng, 5:a 40 poäng, max: 50 poäng

Matematisk analys — LMA400

OBS: Tänk på att det huvudsakligen är beräkningar och motiveringar som ger poäng!

Teori

1. Visa att om en funktion är deriverbar i en punkt så är den också kontinuerlig där. 5p
2. Visa att integralen av en summa är summan av integralerna, dvs att

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

5p

Problem

3. Beräkna följande gränsvärden

a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 25}$ 2p

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x}$ 2p

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 5x^2}{\sqrt{2x^6 + 7x^3}}$ 2p

4. Beräkna följande integraler

(a) $\int \frac{x^2}{x^2 - 1} dx$ 3p

(b) $\int \tan(x) \ln(\cos(x)) dx$ 4p

5. Lös differentialekvationerna

(a) $y'' - 2y' - 15y = 0$ där $y'(0) = 7$ och $y(0) = 3$ 3p

(b) $(x^2 + 1)y' + xy = 0$ 3p

(c) $y' = 1 + x + y + xy, y(0) = 3$ 4p

Var vänlig vänd!

6. Visa att en sfär med radie r har volymen $V = \frac{4\pi}{3}r^3$ genom att rotera en halvcirkel med radie r kring x -axeln. 4p

7. En friidrottsarena skall konstrueras. Det är bestämt att den skall ha en 400 meter lång bana bestående av två halvcirklar samt av två parallella rakor som är lika långa (se bild). Bestäm banans mått så att det rektangulära området innanför banan (färgat i bilden nedan) blir så stort som möjligt. Beräkna sedan hur banan skulle se ut om man ville maximera hela området innanför banan, inklusive cirkelskiivorna. 6p



8. En elastisk boll fylls med luft med en hastighet av $40 \text{ cm}^3/\text{s}$.
a) Hur fort ändras bollens radie i det ögonblick då radien är 10 cm? 3p

b) Beräkna andraderivatans av radien med avseende på tiden i det ögonblick då radien är 10 cm. Motivera med hjälp av andraderivata att grafen för radien, som en funktion av tiden, är konvex ned medan bollen fylls på. 4p

Lycka till önskar Samuel