MATEMATIK — Hjälpmedel: Inga
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Tentamen 2017-08-24 kl. 14:00–18:00
Telefonvakt: Samuel Bengmark telefon.: 031-772 5302
Betygsgränser 3:a 20 poäng, 4:a 30 poäng, 5:a 40 poäng, max: 50 poäng

Lösningsförslag till Matematisk analys — LMA400

OBS: Tänk på att det huvudsakligen är beräkningar och motiveringar som ger poäng!

Teori

1. Visa att om $f(x)$ är en udda funktion så är $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Lösning:
Se sid 417-418 i Stewart.

2. Visa att $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Lösning:
Se sid 213-214 i Stewart.

Problem

3. Beräkna följande gränsvärden

(a) $\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{x^2+3x-10}{x^2-4}$
Lösning:

$$\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{x^2+3x-10}{x^2-4} = \lim_{x\longrightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+5)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x\longrightarrow 2} \frac{x+5}{x+2} = \frac{7}{4}$$

(b) $\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x+3}$
Lösning:

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x+3} = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{x(1+\frac{3}{x})} \overset{x\leq 0}{=} \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{\cancel{x}(-1)\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{\cancel{x}(1+\frac{3}{x})} = -1$$

4. Beräkna följande integraler

(a) $\int_{-1}^{1} e^{-|x|}\,dx$ — 3p
Lösning:
En utmaning i denna uppgift är att där finns ett absolutbelopp. Vi löser detta genom att dela upp integralen i delar, från -1 till 0 och från 0 till 1. Alternativt observerar vi att integranden är jämn och får att

$$\int_{-1}^{1} e^{-|x|}\,dx = 2\int_{0}^{1} e^{-|x|}\,dx = 2\int_{0}^{1} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 2(-e^{-1}-(-1)) = 2(1-\frac{1}{e})$$

(b) $\int \frac{x^3}{x^2-4}\,dx$ (OBS graden i täljaren är högre än nämnaren!)
Lösning:
Då graden är högre i täljaren kan vi inte använda partialbråksuppdelning. Men genom polynomdivision finner vi att $\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{4x}{x^2-4}$. På den andra termen använder vi partialbråksuppdelning och får att $\frac{4x}{x^2-4} = \frac{4x}{(x-2)(x+2)} = \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}$. Vi finner därför att

$$\int \frac{x^3}{x^2-4}\,dx = \int x + \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}\,dx = \frac{x^2}{2} + 2\ln(x-2) + 2\ln(x+2) = \frac{x^2}{2} + \ln\left((x^2-4)^2\right)$$

(c) $\int_0^3 1 + \sqrt{9-x^2}\,dx$ mha en trigonometrisk substitution
Lösning:
Beräkna integralen för var och en av termerna separat.

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx = &\begin{pmatrix} x = 3\sin t \\ dx = 3\cos t dt \\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9-9\sin^2 t}\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Vi finner och så $\int_0^3 1\,dx = 3$. Totalt finner vi att integralen får värdet $3 + \frac{\pi}{4}$.

5. Lös diffekvationerna

(a) $y'' - y' - 2y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1$
Lösning:
Detta är en linjär homogen differentialekvation med konstanta koefficienter. Tar fram dess karakterista ekvation och finner dess rötter.

$$r^2 - r - 2 = 0 \Rightarrow r_1 = -1, r_2 = 2$$

Eftersom vi har två olika lösningar ges den allmänna lösningen till differentialekvationen av

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x}$$

Eftersom vi då har att $y'(x) = -Ae^{-x} + 2Be^{2x}$ ger begynnelsevärdena att

$$\begin{cases} 2 = y(0) = A + B \\ 1 = y'(0) = -A + 2B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

Den efterfrågade lösningen är därför $y(x) = e^{-x} + e^{2x}$

(b) $y' + \frac{2}{x}y = x^2 + x$
Lösning:
Detta är en linjär differential ekvation av första ordning som vi alltså löser med integrerande faktor.

$$I(x) = e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{2\ln 2} = e^{\ln x^2} = x^2$$

Vi tittar nu på derivatan av produkten $y(x)I(x)$.

$$\left(y(x)x^2\right)' = y'(x)x^2 + y(x)2x = x^2\underbrace{\left(y'(x) + \frac{2}{x}y(x)\right)}_{\text{VL i diffekv.}} = x^2\underbrace{x^2 + x}_{\text{HL}} = x^4 + x^3$$

Vi integrerar båda sidor och får att $y(x)x^2 = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + C$. Vi har funnit att

$$y(x) = \frac{x^3}{5} + \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}$$

(c) $y' - \sqrt{y} = x\sqrt{y}$ 3p
Lösning:
Men lite arbete kan vi se att detta är en separabel diffekvation. S

$$y' - \sqrt{y} = x\sqrt{y} \Longleftrightarrow y' = x\sqrt{y} + \sqrt{y} = \sqrt{y}(x+1) \Longleftrightarrow \frac{y'}{\sqrt{y}} = x + 1 \text{ där } y \neq 0$$

Detta ger sambandet

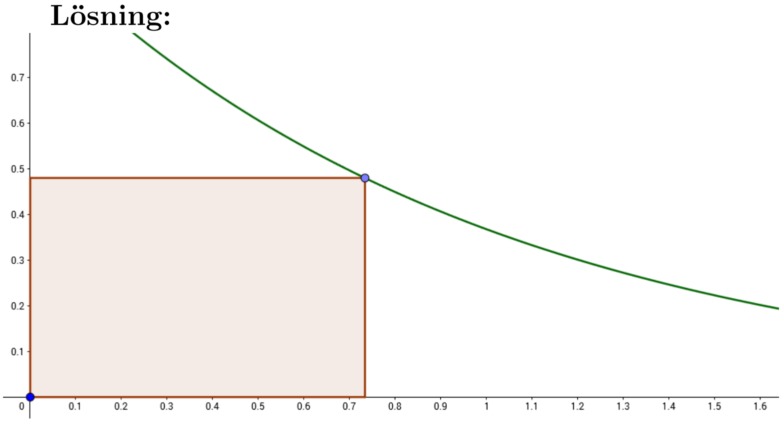
$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} = \int x + 1 \Longrightarrow 2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + x + C \Longrightarrow y = (\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{C}{2})^2$$

Där man meed fördel kan byta ut konstanten $\frac{C}{2}$ mot en ny konstant, tex K.

Återstår kolla fallet y konstant lika med noll. Vi finner då att även $y' = 0$ och ser att alla tre termerna i diffekvationen blir noll, dvs att ekvationen är satisfierad. Vi har alltså funnit ytterligare en lösning $y(x) = 0\,\forall x \in \mathbb{R}$.

6. Bestäm största arean av en rektangel med horisontala och verktikala sidor och med det vänster nedre hörn i origo och höger övre hörn på kurvan $y = e^{-x}$.

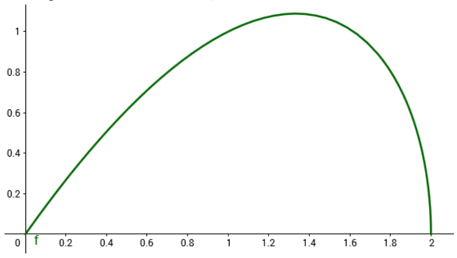
Lösning:



Rektangeln har basen x och höjden e^{-x}, dvs arean $A(x) = xe^{-x}$. För att hitta maximum söker vi stationära punkter dvs då $0 = A'(x) = e^{-x} + xe^{-x}(-1) = e^{-x}(1-x)$. Vi finner en stationär punkt $x = 1$. Inga ändpunkter finns att kontrollera. Genom teckenstudium ser vi att då e^{-x} alltid är positiv så är $A'(x)$ positiv då $x < 1$ och negativ då $x > 1$. Alltså är den statiionära punkter $x = 1$ ett maximum och arean är där $A(1) = \frac{1}{e}$.

7. Beräkna volymen man får när man roterar regionen mellan $y = x\sqrt{2-x}$ och $y = 0$ runt x-axeln.

Lösning:
Vi använder skivmetoden där vi får cirkelskivor ortogonala mot x-axeln som vid x har radien $y = x\sqrt{2-x}$, dvs skivor med area $A(x) = y^2\pi = x^2(2-x)\pi$.



Vi integrerar dessa från $x = 0$ till $x = 2$ och får volymen

$$V = \int_0^2 A(x)\,dx = \pi\int_0^2 x^2(2-x)\,dx = \pi\int_0^2 (2x^2 - x^3)\,dx =$$
$$= \pi\left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \pi\left(\frac{16}{3} - \frac{16}{4}\right) = \frac{4\pi}{3}$$

8. Antag att koefficienterna i polynomet $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ uppfyller sambandet $a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{d}{4} = 0$. Visa att $p(x)$ har ett nollställe mellan 0 och 1. Observera att $p(x)a +$ 6p
$bx + cx^2 + dx^3$ har antiderivata $P(x) = ax + \frac{b}{2}x^2 + \frac{c}{3}x^3 + \frac{d}{4}x^4$. Det betyder att om vi integrerar över intervallet där nollstället skall finnas får vi att

$$\int_0^1 p(x)\,dx = \int_0^1 P(x)\,dx = \left[ax + \frac{b}{2}x^2 + \frac{c}{3}x^3 + \frac{d}{4}x^4\right]_0^1 = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{d}{4} = 0$$

Vi har alltså sett att integralen äver området är noll. Antar vi nu att minst en av koefficienterna i $p(x)$ är skiljd i från noll så är polynomet ej konstant och tar värden skiljda ifrån noll i intervallet 0 till 1.

Antag nu att funktionen positivt värde i $x_1 \in [0,1]$, dvs att $f(x_1) > 0$. Om $p(x) > 0$ på hela intervallet vet vi enligt satsen jämförelser mellan integraler att integralen $\int_0^1 p(x)\,dx > 0$ (det följer också direkt från definitionen av intergraler). Eftersom så inte är fallet måste funktionen också anta negativa värden på intervallet, låt oss säga $f(x_2) < 0$. Eftersom polynom ger kontinuerliga funktioner kan vi med hjälp av satsen om mellanliggande värden dra slutsatsen att det finns ett nollställe i intervallet $[x_1, x_2] \subseteq [0,1]$.

Samuel