Matematik | Hjälpmedel: Inga
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen 2014-04-13 kl. 8:30–12:30 Telefonvakt: Samuel Bengmark ankn.: 0723-876441
Betygsgränser 3:a 20 poäng, 4:a 30 poäng, 5:a 40 poäng

Matematisk analys — LMA400

OBS: Tänk på att det huvudsakligen är beräkningar och motiveringar som ger poäng!

Teori

1. Bevisa att för två deriverbara funktioner gäller att derivatan av funktionernas summa är summan av funktionernas derivator. 6 p

2. Visa substitutionsregeln för integraler, dvs att om $g(x) = u$ är en deriverbar funktion vars värdemängd är ett intervall I och om f är kontinuerlig på I så gäller att

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

6 p

Problem

3. Beräkna följande gränsvärden

(a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4-2x^3+3}{x^4+7x^3-2x^2}$ 2 p

(b) $\lim_{x\to 3} \frac{x-\sqrt{x+6}}{x^2-9}$ 2 p

(c) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$ 2 p

4. Beräkna följande integraler

(a) $\int \frac{1}{x^2-9}\,dx$ 3 p

(b) $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$ 3 p

5. Lös diffekvationerna

(a) $y' + 2xy = 2x^3$, där y(0)=1 4 p

(b) $y'' - 9y = 0$, där $y(0) = 4$ och $y'(0) = 6$. 3 p

Var vänlig vänd!

6. Betrakta funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{om } x < 0 \\ x^3 + 2x + 1 & \text{om } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) I vilka punkter är f kontinuerlig? 3 p

(b) I vilka punkter är f deriverbar? 3 p

7. En rektangel i övre halvplanet har två av sina hörnpunkter på x-axeln och två på parabeln $y = 1 - x^2$. Bestäm största möjliga area som rektangeln kan ha.

6 p

8. Tänk dig ett glas vars insida fås genom att man roterar parabeln $y = x^2$ runt y-axeln. Hur högt upp måste glaset fyllas för att det skall vara 120 cm^3 i glaset?

7 p

Lycka till önskar Samuel och Torbjörn