MATEMATIK Hjälpmedel: Inga
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Tentamen 2014-04-13 kl. 8:30–12:30 Telefonvakt: Samuel Bengmark ankn.: 0723-876441
Betygsgränser 3:a 20 poäng, 4:a 30 poäng, 5:a 40 poäng

Matematisk analys — LMA400

OBS: Tänk på att det huvudsakligen är beräkningar och motiveringar som ger poäng!

Teori

1. Bevisa att för två deriverbara funktioner gäller att derivatan av funktionernas summa är summan av funktionernas derivator. 6 p

Lösning:
Se högst upp på sidan 178 i Stewart.

2. Visa substitutionsregeln för integraler, dvs att om $g(x) = u$ är en deriverbar funktion vars värdemängd är ett intervall I och om f är kontinuerlig på I så gäller att

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

6 p

Lösning:
Detta följer av kedjeregeln. Beviset börjar längst ner på sidan 407 i Stewart.

Problem

3. Beräkna följande gränsvärden

(a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4-2x^3+3}{x^4+7x^3-2x^2}$ 2 p

Lösning:
Lös ut x^4 ur täljare och nämnare.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4-2x^3+3}{x^4+7x^3-2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^4}(2-\overset{\nearrow 0}{\frac{2}{x}}+\overset{\nearrow 0}{\frac{3}{x^4}})}{\cancel{x^4}(1+\underset{\searrow 0}{\frac{7}{x}}-\underset{\searrow 0}{\frac{2}{x^2}})} = \frac{2}{1} = 2.$$

(b) $\lim_{x\to 3} \frac{x-\sqrt{x+6}}{x^2-9}$ 2 p

Lösning:
Förläng med konjugat och fakorisera innan gemensam faktor kan kancelleras.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-\sqrt{x+6}}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-(x+6)}{(x-3)(x+3)(x+\sqrt{x+6})} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)(x+\sqrt{x+6})} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+2)}{(x+3)(x+\sqrt{x+6})} = \frac{5}{6\cdot 6} = \frac{5}{36}.$$

(c) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$
Lösning:
Substituera $-\frac{1}{n}$ mot x.

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \lim_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{1}{x}}$$

Nu kan man antingen använda standardgränsvärdet $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ och finna att

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}((1+x)^{\frac{1}{x}})^{-1} = e^{-1}$$

eller så kan man förlänga med e och ln och finna att

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x}\ln(1+x)} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} e^{-\frac{\frac{1}{1+x}}{1}} = e^{-1}$$

4. Beräkna följande integraler

(a) $\int \frac{1}{x^2-9}\,dx$
Lösning:

$$\int \frac{1}{x^2-9}\,dx = \int \frac{1}{(x-3)(x+3)}\,dx \overset{\text{p.b.u.}}{=} \int \frac{1/6}{x-3} - \frac{1/6}{x+3}\,dx = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C.$$

(b) $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$
Lösning:

$$\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx = \begin{pmatrix} u = \ln x, & x = 1 \implies u = 0 \\ du = \frac{1}{x}dx, & x = e \implies u = 1 \end{pmatrix} = \int_0^1 \sqrt{u}\,du = \left[u^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

5. Lös diffekvationerna

(a) $y' + 2xy = 2x^3$, där y(0)=1
Lösning:
Detta är en första ordningens differentialekvation då den har formen $y' + f(x)y = g(x)$. där $f(x) = 2x$ och $g(x) = 2x^3$. Därmed är $F(x) = x^2$ så har vi en integrerande faktor e^{x^2}. Finner då att

$$(e^{x^2}y)' = e^{x^2}2x^3 \implies e^{x^2}y = \int e^{x^2}2x^3\,dx$$

Vi använder partiell integration och finner att

$$\int 2x^3e^{x^2}\,dx = \int \underset{\downarrow}{x^2}\overbrace{\left(2xe^{x^2}\right)}^{\uparrow}\,dx \overset{p.i.}{=} x^2e^{x^2} - \int 2xe^{x^2}\,dx = x^2e^{x^2} - e^{x^2} + C = e^{x^2}(x^2-1) + C$$

Löser ut y genom att dividera med e^{x^2} och får då att

$$y = x^2 - 1 + Ce^{-x^2}.$$

Begynnelsevärdet ger $1 = y(0) = -1 + C$ dvs $C = 2$.

(b) $y'' - 9y = 0$, där $y(0) = 4$ och $y'(0) = 6$. 3 p

Lösning:

Detta är en linjär differentialekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter. Vi tar därför fram den karakteristiska ekvationen $r^2 - 9 = 0$ som vi ser har lösningarna $r_1 = 3$ och $r_2 = -3$. Vi vet då att den generella lösningen för differentialekvationen ges av

$$y = Ae^{3x} + Be^{-3x}.$$

Använder nu begynnelsevilkorna som ges att

$$\begin{cases} 4 = y(0) = A + B \\ 6 = y'(0) = 3A - 3B \end{cases}$$

Detta linjära andragradssystem har lösningar $A = 3$ och $B = 1$. Lösningen till uppgiften är därför

$$y = 3e^{3x} + e^{-3x}.$$

Var vänlig vänd!

6. Betrakta funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{om } x < 0 \\ x^3 + 2x + 1 & \text{om } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) I vilka punkter är f kontinuerlig?
Lösning:
För alla punkter $x \neq 0$ är funktionen kontinuerlig. Återstår att undersöka om $\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = f(0)$. Ser nu att

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Vidare är

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} x^3 + 2x + 1 = 1.$$

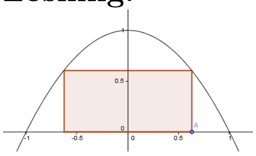
Slutligen ser vi att

$$f(0) = 0^3 + 2 \cdot x + 1 = 1.$$

Vi har därmed visat att f(x) är kontinuerlig också $x = 0$.

(b) I vilka punkter är f deriverbar?
Lösning:
För alla punkter $x \neq 0$ är funktionen deriverbar. Återstår att undersöka om högerderivatan är lika med vänsterderivatan i $x = 0$. Ser dock att vänsterderivatan är 0 medan högerderivatan är 2. Vi har därmed visat att f(x) deriverbar i alla punkter utom $x = 0$.

7. En rektangel i övre halvplanet har två av sina hörnpunkter på x-axeln och två på parabeln $y = 1 - x^2$. Bestäm största möjliga area som rektangeln kan ha.
Lösning:



Om en hörnpunk läggs i punkten $(x, 0), 0 \leq x \leq 1$ kommer arean för rekangeln att vara

$$A(x) = \text{bas} \cdot \text{höjd} = 2x \cdot (1 - x^2) = 2x - 2x^3.$$

För att maximera så undersöker vi derivatans nollställen samt ändpunkterna $x = 0$ och $x = 1$.

$$0 = A'(x) = 2 - 6x^2 \implies x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Då x positivt får vi tre värden att jämföra:

$$A(0) = 0, A(1) = 0 \text{ och } A(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{4}{3\sqrt{3}}$$

och ser att största möjliga area är $\frac{4}{3\sqrt{3}}$.

8. Tänk dig ett glas vars insida fås genom att man roterar parabeln $y = x^2$ runt y-axeln. Hur högt upp måste glaset fyllas för att det skall vara 120 cm^3 i glaset? 7 p

Lösning:

Vi räknar ut volymen med skivmetoden för $0 \le y \le h$. Varje skivas volym ges av $\pi x^2 \, \Delta y$, där $x = \sqrt{y}$. Vi finner då att volymen ges av

$$V(y) = \int_0^h \pi \cdot (\sqrt{y})^2 \, dy = \int_0^h \pi y \, dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^h = \pi \frac{h^2}{2}$$

Vi finner då

$$120 = \pi \frac{h^2}{2} \implies h = \sqrt{\frac{240}{\pi}} \text{ cm}$$

Lycka till önskar Samuel och Torbjörn