LMA400, Tentamen 2018-01-12, lösningar

1. Se Stewart s. 156, 157!

2. Se Stewart s. 214!

3. (a)
$$\lim_{x\to -1} \frac{\overbrace{x^2-1}^{\to 1-1=0}}{\underbrace{2x^2+8x+6}_{\to 2-8+6=0}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+4x+3}$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{(x+1)}(x+3)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x+3}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$
(alt. använd l'Hôpital)

(b) $-1 \le \sin(x) \le 1 \implies -\frac{1}{x} \le \frac{\sin(x)}{x} \le \frac{1}{x}$ $\quad (x>0)$

$\pm\frac{1}{x} \longrightarrow 0$ då $x \longrightarrow \infty$ så $\frac{\sin(x)}{x} \longrightarrow \underline{\underline{0}}$

då $x \longrightarrow \infty$, enligt instängningssatsen.

(c)
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\overbrace{(x-\frac{\pi}{2})^2}^{\to 0}}{\underbrace{\cos(x)}_{\to 0}} = \text{l'Hôpital} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\overbrace{2(x-\frac{\pi}{2})}^{\to 0}}{\underbrace{-\sin(x)}_{\to -1}} = \underline{\underline{0}}.$$

4. (a)
$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t xe^{-x}\,dx = \text{partiell integration}$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left(\left[-xe^{-x}\right]_0^t - \int_0^t (-e^{-x})\,dx\right)$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left(-te^{-t}+0+\int_0^t e^{-x}\,dx\right)$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left(-te^{-t}+\left[-e^{-x}\right]_0^t\right) = \lim_{t\to\infty}\left(-te^{-t}-e^{-t}-(-e^{-0})\right)$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\underbrace{(1+t)}_{\to\infty}\underbrace{e^{-t}}_{\to 0}+1\right) =$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1+t}{e^t}+1\right) = \text{l'Hôpital i 1:a termen}$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{\underbrace{e^t}_{\to 0}}+1\right) = \underline{\underline{1}}$$

(alt. kan man inse att $(1+t)e^{-t} \longrightarrow 0$, $t \longrightarrow \infty$, direkt eftersom exponentialfunktionen avtar snabbare än $1+t$ växer)

4 (b) $\int \frac{1}{\sin(x)}dx = \int \frac{\sin(x)}{\sin(x)^2}dx = \int \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)^2}dx$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = \cos(x) \\ du = -\sin(x)dx \end{array} \right\} = -\int \frac{1}{1-u^2}du = \int \frac{1}{u^2-1}du$$

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{(u+1)(u-1)} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u-1}$$

$$\Longrightarrow A(u-1) + B(u+1) = 1$$

$u = 1 \Longrightarrow 0A + 2B = 1 \Longrightarrow B = \frac{1}{2}$

$u = -1 \Longrightarrow -2A + 0B = 1 \Longrightarrow A = -\frac{1}{2}$

så

$$\int \frac{1}{\sin(x)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u-1}du - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u+1}du$$

$$= \frac{1}{2}\ln(|u-1|) - \frac{1}{2}\ln(|u+1|) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln(|\cos(x)-1|) - \frac{1}{2}\ln(|\cos(x)+1|) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{\cos(x)-1}{\cos(x)+1}\right|\right) + C$$

$$= \ln\left(\sqrt{\left|\frac{\cos(x)-1}{\cos(x)+1}\right|}\right) + C$$

$= \text{etc} \ldots$

många mer eller mindre likvärdiga tänkbara svar

5 (a) Integrerande faktor är $e^{\int 2t\,dt} = e^{t^2}$ så lösning är

$$y(t) = e^{-t^2}\int t e^{t^2}dt = \left\{ \begin{array}{l} u = t^2 \text{ i integralen} \\ du = 2t\,dt \Longleftrightarrow \frac{1}{2}du = t\,dt \end{array} \right\}$$

$$= e^{-t^2}\int e^u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}e^{-t^2}\left(e^u + C\right) = \frac{1}{2}e^{-t^2}(e^{t^2}+C)$$

$$= \frac{1 + Ce^{-t^2}}{2}$$

$y(0) = 1 \Longrightarrow \frac{1+Ce^0}{2} = 1 \Longrightarrow C = 1$

<u>Svar</u>: $y(t) = \frac{1+e^{-t^2}}{2}$.

5(b) Ekvationen är separabel:

$$y'(x) = x e^{-y(x)} \iff e^{y(x)} y'(x) = x \iff \int e^{y(x)} y'(x)\,dx = \int x\,dx$$

$$\iff \int e^y\,dy = \int x\,dx \iff e^{y(x)} = \frac{x^2}{2} + C \iff \underline{\underline{y(x) = \ln\left(\frac{x^2}{2} + C\right)}}$$

(c) Karakteristisk ekvation: $k^2 - 1 = 0 \iff k = \pm 1$

så homogendel är $y_h(x) = Ae^x + Be^{-x}$.

Ansätt partikulärdel $y_p(x) = Cx + D$ (högerledet är polynom av grad 1)

$\Rightarrow y_p'(x) = C,\ y_p''(x) = 0$. I ekvationen ger detta

$$0 - Cx - D = x \Rightarrow C = -1,\ D = 0 \Rightarrow y_p(x) = -x.$$

Alltså $y(x) = Ae^x + Be^{-x} - x$.

$$y(0) = 1 \Rightarrow A + B = 1 \quad (1)$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow Ae + \frac{B}{e} - 1 = 0 \Rightarrow Ae^2 + B = e \quad (2)$$

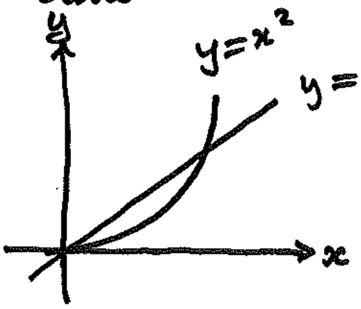
(2) − (1) ger $A(e^2 - 1) + B - B = e - 1$

$$\Rightarrow A = \frac{e-1}{e^2-1} = \frac{e-1}{(e-1)(e+1)} = \frac{1}{e+1}$$

vilket i (1) ger $B = 1 - A = \frac{e+1}{e+1} - \frac{1}{e+1} = \frac{e}{e+1}$

så $y(x) = \frac{e^x}{e+1} + \frac{e \cdot e^{-x}}{e+1} - x = \underline{\underline{\frac{e^x + e^{1-x}}{e+1} - x}}$

6 Skiss



Skärningspunkter: $x = x^2 \iff x^2 - x = 0$

$\iff x(x-1) = 0 \iff x = 0$ resp. $x = 1$

För $0 \le x \le 1$ är $x \ge x^2$ så volymen är

$$\int_0^1 \left(\pi(x)^2 - \pi(x^2)^2\right)dx = \pi\int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx$$

yttre radie, inre radie

$$= \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \pi\,\frac{5-3}{15} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{15}}}$$

7. Låt $m(t)$ vara mängden läkemedel vid tid t i dygn.

Enligt antagandet om exponentiellt avtagande har vi

$$\frac{dm}{dt} = -km(t) \iff m(t) = m(0)e^{-kt} = 50e^{-kt}.$$

Vi har $m(1) = 10 \iff 50e^{-k\cdot 1} = 10 \iff e^{-k} = \frac{1}{5}$

$$\iff -k = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \quad \text{så} \quad m(t) = 50\, e^{\ln\left(\frac{1}{5}\right)t}$$

$$= 50\left(e^{\ln(1/5)}\right)^t = 50\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^t.$$

$$m(2) = 50\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{50}{25} = 2$$

Svar: 2 milligram.

8. Det största antalet kartonger kan tillverkas när varje kartong kräver så lite papp som möjligt. Vi söker alltså minsta arean papp som krävs för att innesluta 32 l.

Vi har:

Volym $V = s^2 h \implies h = \frac{V}{s^2}$

Area $A = \underbrace{4sh}_{\text{sidorna}} + \underbrace{s^2}_{\text{botten}} \overset{\text{enl. ovan}}{=} \frac{4V}{s} + s^2$

$$\frac{dA}{ds} = -\frac{4V}{s^2} + 2s = 0 \implies 2s^3 = 4V \implies s^3 = 2V$$

$$\implies s = \sqrt[3]{2V} = \{V = 32l \implies 2V = 64l = 64\,dm^3 = 4^3\,dm^3\}$$

$$= 4\,dm$$

$\frac{d^2A}{ds^2} = \frac{8V}{s^3} + 2 > 0$ för alla $s > 0$ så $s = 4dm$ måste motsvara globalt minimum för A.

$$A(4) = \frac{4\cdot V}{4} + 4^2 = V + 16 = 48\ dm^2$$

$$\text{Antal lådor} = \frac{200\,dm^2}{48\,dm^2} = 4 + \frac{8}{48} = 4 + \frac{1}{6}$$

Svar: 4 hela lådor.