LMA400, tentamen 2018-08-30, lösningar

1. Se Stewart s. 221.

2. Se Stewart s. 472.

---

3 (a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{\ln(1+1/x)}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x\ln(1+1/x)}$ (*)

$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{x}_{\to\infty}\underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} = \lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}} = \text{l'Hôpital}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}{\cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}} = \frac{1}{1} = 1 \qquad (**)$$

(**) i (*) ger

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(1+1/x)} = e^1 = \underline{\underline{e}}.$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x\cos(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_{\to 1} = \underline{\underline{1}}$

alt. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\overbrace{\tan(x)}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to 0}} = \text{l'Hôpital} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(\tan(x))'}{(x)'}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+\overbrace{\tan(x)}^{\to 0}{}^2}{1} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}.$$

---

4 (a) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2-x)\cos(x^3)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\overbrace{\underbrace{x^2}_{\text{jämn}}\underbrace{\cos(x^3)}_{\text{jämn o udda} = \text{jämn}}}^{\text{jämn}} - \overbrace{\underbrace{x}_{\text{udda}}\underbrace{\cos(x^3)}_{\text{jämn}}}^{\text{udda}}\Big)\,dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(x^3)\,dx = \left\{\begin{array}{l} u = x^3 \\ du = \frac{du}{dx}dx = 3x^2dx \iff x^2dx = \frac{1}{3}du \\ x = 0 \implies u = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \implies u = \frac{\pi^3}{8}\end{array}\right\}$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi^3/8}\cos(u)\,du = \frac{2}{3}\Big[\sin(u)\Big]_0^{\pi^3/8} = \frac{2}{3}\Big(\sin\left(\frac{\pi^3}{8}\right) - \underbrace{\sin(0)}_{=0}\Big)$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{3}\sin\left(\frac{\pi^3}{8}\right)}}$$

4(b) $$\int_1^2 x\ln(x)\,dx = \text{partiell integration} = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{4}{2}\ln(2) - \frac{4}{4}\right) - \left(\frac{1}{2}\ln(1) - \frac{1}{4}\right) = 2\ln(2) - 1 + \frac{1}{4} = \underline{\underline{\ln(4) - \frac{3}{4}}}$$

(c) $$\int \frac{\tan(\arcsin(x))}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left\{\begin{array}{l} u = \arcsin(x) \\ du = \frac{du}{dx}dx = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \end{array}\right\}$$

$$= \int \tan(u)\,du = \int \frac{\sin(u)}{\cos(u)}\,du = \left\{\begin{array}{l} v = \cos(u) \\ dv = \frac{dv}{du}du = -\sin(u)du \end{array}\right\}$$

$$= -\int \frac{1}{v}\,dv = -\ln(|v|) + C = -\ln(|\cos(u)|) + C$$

$$= \underbrace{-\ln(|\cos(\arcsin(x))|) + C}_{\text{OK som svar, men bättre...}} = -\ln\left(\left|\sqrt{1 - \sin(\arcsin(x))^2}\right|\right) + C$$

$$= \underline{\underline{-\ln(\sqrt{1-x^2}) + C}} \quad \text{... såhär!}$$

5(a)

$$\underbrace{y(t)y'(t) = 1 + t^2}_{\text{separabel!}}$$

$$\Leftrightarrow \int y(t)\frac{dy}{dt}\,dt = \int (1+t^2)\,dt \Leftrightarrow \int y\,dy = \int (1+t^2)\,dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}y(t)^2 = t + \frac{t^3}{3} + C \Leftrightarrow y(t) = (\pm)\sqrt{2t + \frac{2t^3}{3} + C}$$

y(0) ska vara positiv, så negativa roten ger ej rätt lösning.

$$y(0) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{20 + \frac{20^3}{3} + C} = 2 \Leftrightarrow C = 4$$

Svar: $y(t) = \sqrt{2t + \frac{2t^3}{3} + 4}$

5(b) $(xy'(x))' = \ln(x) \iff \int (xy'(x))'dx = \int \ln(x)\,dx$

$\iff xy'(x) = x\ln(x) - x + C \iff y'(x) = \ln(x) - 1 + \frac{C}{x}$

$\iff \int y'(x)dx = \int \left(\ln(x) - 1 + \frac{C}{x}\right)dx$

$\iff y(x) = x\ln(x) - x - x + C\ln(\underbrace{|x|}_{=x \text{ då } x>1}) + D$

$= x\ln(x) - 2x + C\ln(x) + D$

$y(1) = 0 \iff 1\underbrace{\ln(1)}_{=0} - 2\cdot 1 + C\underbrace{\ln(1)}_{=0} + D = 0 \iff D = 2$

$y'(1) = 0 \iff \underbrace{\ln(1)}_{=0} - 1 + \frac{C}{1} = 0 \iff C = 1$

Svar: $y(x) = x\ln(x) - 2x + \ln(x) + 2$
$= (1+x)\ln(x) + 2(1-x).$

(c) Homogen del Karakteristisk ekvation $k^2 - 2k + 1 = 0 \iff k = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1 \pm 0$

1 är dubbelrot, allmän homogendel: $y_h(x) = (A + Bx)e^x$

Partikulär del Ansätt $y_p(x) = C\sin(x) + D\cos(x)$

$\implies y_p'(x) = C\cos(x) - D\sin(x)$

$y_p''(x) = -C\sin(x) - D\cos(x) = -y_p(x)$

Så $2\sin(x) = y_p''(x) - 2y_p'(x) + y_p(x)$

$= \cancel{-y_p(x)} - 2y_p'(x) + \cancel{y_p(x)} = -2y_p'(x)$

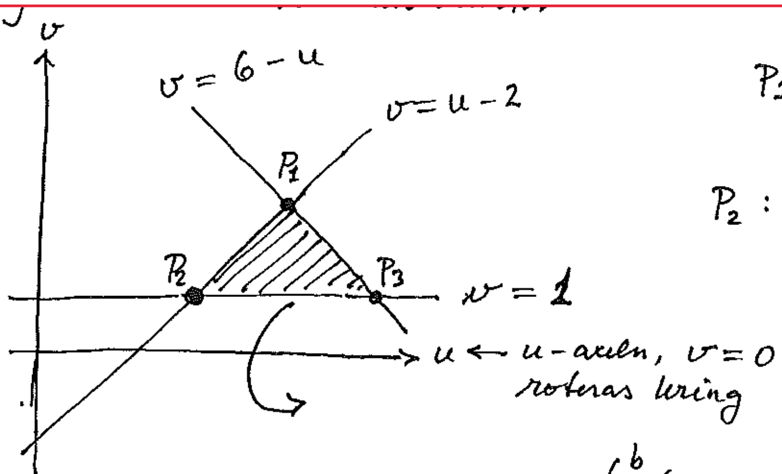
$= -2C\cos(x) + 2D\sin(x) \implies C = 0,\ D = 1$

alltså $y_p(x) = \cos(x).$

Allmän lösning är $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \underline{\underline{(A+Bx)e^x + \cos(x)}}$

6. Skiss

Uppgiften förenklad, så att variabelbyte utgår, efter att denna lösnings skrivits ner. Använd därför variabelnamnet y istället för v och x istället för u i lösningen nedan.



Skärningspunkter

P_1: $u-2 = 6-u \iff 2u = 8 \iff u=4$
svarar mot $v = u-2 = 2$

P_2: $u-2 = 1 \iff u = 3$
svarar mot $v = 1$

P_3: $6-u = 1 \iff u = 5$
svarar mot $v = 1$

Enligt formeln $V = \pi\int_a^b (R(u)^2 - r(u)^2)\,du$ får vi

$R(u)$: yttre radie, $r(u)$: inre radie

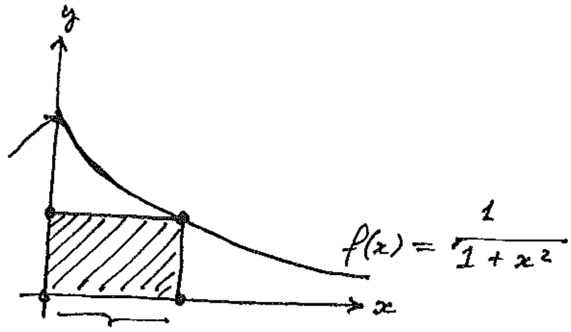
$$V = \underbrace{\pi\int_3^4 ((u-2)^2 - 1^2)\,du}_{\text{delen där } v=u-2 \text{ är ytterst}} + \underbrace{\pi\int_4^5 ((6-u)^2 - 1^2)\,dV}_{\text{delen där } v=6-u \text{ är ytterst}}$$

$$= \pi\int_3^4 (u^2 - 4u + 3)\,du + \pi\int_4^5 (35 - 12u + u^2)\,du$$ ← Räcker med detta.

$$= \pi\left[\frac{u^3}{3} - 2u^2 + 3u\right]_3^4 + \pi\left[35u - 6u^2 + \frac{u^3}{3}\right]_4^5$$

$$= \pi\left(\frac{64-27}{3} - 2(16-9) + 3(4-3)\right) + \pi\left(35(5-4) - 6(25-16) + \frac{125-64}{3}\right) = 2 + \frac{2}{3}$$

7. Skiss



rektangel vars area ska maximeras.

Rektangelns area

$$A = \text{bas} \cdot \text{höjd} = x \cdot \frac{1}{1+x^2},$$

Då $f(x)$ är jämn, dvs. problemet är symmetriskt kring y-axeln, kan vi anta att $\underline{x \geq 0}$.

$A(x)$ är definierat för alla $x > 0$. Vi söker stationära punkter:

$$A'(x) = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{(x)'(1+x^2) - (1+x^2)' \cdot x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1+x^2-2x \cdot x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$A'(x)$ är definierat för alla $x \geq 0$ så maximum kan antas då $A'(x) = 0$

$$\Longleftrightarrow \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Longleftrightarrow 1-x^2 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm 1, \underline{1}$$

Teckentabell:

$x \geq 0$		1	
$A'(x)$	$-$	0	$-$
$A(x)$	↗	max	↘

Vi ser att $x = 1$ ger globalt maximum för $x \geq 0$ ty A är avtagande för $x > 1$ och växande för $0 \leq x < 1$.

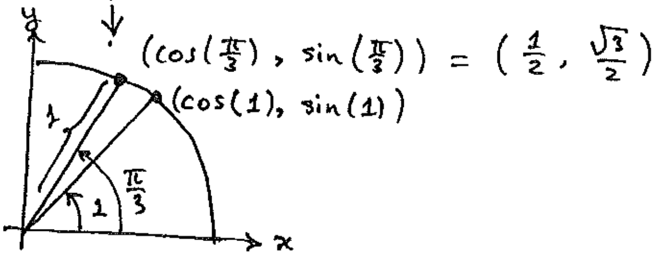
Största area är alltså $A(1) = \frac{1}{1+1^2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

8. $f(x) = \cos(x)e^x + x - 2$ är kontinuerlig på $[0, 1]$.

Vi har att $f(0) = \underbrace{\cos(0)}_{=1}\underbrace{e^0}_{=1} + 0 - 2 = -1 < 0$ medan

$f(1) = \cos(1)e + 1 - 2 = \underbrace{\cos(1)}_{\geq \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}}e - 1 \geq \frac{e}{2} - 1 > 0$ ty $e > 2$.

Satsen om mellanliggande värde ger alltså att det finns ett $x \in [0, 1]$ sådant att $f(x) = 0$.



Linjär approximation för uppskattning av var denna lösning finns:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x - 0) = 0 \implies x = -\frac{f(0)}{f'(0)} \quad (*)$$

$$f'(x) = -\sin(x)e^x + \cos(x)e^x + 1 \implies f'(0) = -\underbrace{\sin(0)}_{=0}\underbrace{e^0}_{=1} + \underbrace{\cos(0)}_{=1}\underbrace{e^0}_{=1} + 1 = 2 \quad (**)$$

(**) i (*) ger

$x = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$, dvs. lösningen bör finnas i närheten av $x = \frac{1}{2}$.