Teori och bevis, LMA400, 2017/18

Nedanstående satser och påståenden är lämpliga att förstå i detalj och kunna bevisa vid tentamen. Sidhänvisningar gäller 8:e upplagan av kursboken. Listan utökas kontinuerligt under kursens gång.

1. Summaformeln för gränsvärden: Om f och g har ändliga gränsvärden då x går mot a gäller

   $$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

   (Stewart, sidor 95 och 111.)

2. Deriverbarhet innebär kontinuitet: Om f är deriverbar i a så är f kontinuerlig i a (Stewart, sidorna 156 och 157). Man bör också kunna ge ett motexempel som visar att det omvända inte är sant, alltså att kontinuitet inte i sig medför deriverbarhet (exempelvis: Stewart exempel 2.3.7 och 2.8.5).

3. Produktregeln för derivata: $(fg)' = f'g + fg'$ för deriverbara funktioner f och g. (Stewart, sidor 183–184. Alternativt kan följande, mer formella bevis användas:

   $$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \{\text{subtrahera och addera } f(x)g(x+h) \text{ i täljaren}\}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}f(x)\right).\end{aligned}$$

   Eftersom f och g är deriverbara, därmed också kontinuerliga, gäller att

   $$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &\to f'(x) &&\text{(ändligt)},\\ \frac{g(x+h)-g(x)}{h} &\to g'(x) &&\text{(ändligt)},\\ g(x+h) &\to g(x) &&\text{(ändligt)},\end{aligned}$$

   då $h\to 0$, så enligt räknelagarna för gränsvärden får vi

   $$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (f'g+fg')(x).$$

   Detta gäller för alla x där f och g är deriverbara, och därmed är beviset klart.)

4. $\frac{\sin(h)}{h} \to 1$ då $h \to 0$. (Stewart, sidor 191–192.)
5. $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$. (Stewart, sidan 214.)
6. $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ (Stewart, sidan 218. Man får inte utgå från formeln för derivatan av $\log_b(x)$, utan måste kunna redovisa hela härledningen.)
7. Derivata av potensfunktion: $(x^n)' = nx^{n-1}$ för alla reella tal n. (Stewart, sidan 221.)
8. Rolles sats (Stewart, sidan 287).
9. Medelvärdessatsen (Stewart, sidor 288–289).
10. Om $f'(x) = 0$ för alla $x \in (a, b)$ så är f konstant på (a, b). (Stewart, sidor 290–291.
11. Analysens huvudsats (the Fundamental Theorem of Calculus, Stewart sidor 394–395 och 396–397)
12. Substitutionsregeln för integraler (Stewart, sidor 412–413 (indefinit) och 416 (definit)).
13. Integral av symmetrisk integrand:
$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x & \text{om } f \text{ är jämn,} \\ 0 & \text{om } f \text{ är udda.} \end{cases}$$
(Stewart, sidor 417–418.)
14. Partiell integration: $\displaystyle\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,\mathrm{d}x$ när f är deriverbar och g är integrerbar med primitiv funktion G. (Stewart, sidan 472.)