

1. Se Stewart s. 156, 157!

2. Se Stewart s. 214!

$$\begin{aligned}
 3. (a) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\overbrace{x^2 - 1}^{1-1=0}}{\underbrace{2x^2 + 8x + 6}_{\rightarrow 2-8+6=0}} &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4x + 3} \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{(x+1)}(x+3)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x+3} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}} \quad (\text{alt. använd l'Hôpital})
 \end{aligned}$$

$$(b) \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

$$\pm \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow \infty \text{ så } \frac{\sin(x)}{x} \rightarrow \underline{\underline{0}}$$

då $x \rightarrow \infty$, enligt instängningsatsen. $\rightarrow 0$

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\overbrace{(x - \frac{\pi}{2})^2}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{\cos(x)}_{\rightarrow 0}} = \text{l'Hôpital} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2(x - \frac{\pi}{2})}{-\sin(x)} = \underline{\underline{0}}$$

$$\begin{aligned}
 4. (a) \quad \int_0^{\infty} x e^{-x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x e^{-x} dx = \text{partiell integration} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left[-x e^{-x} \right]_0^t - \int_0^t (-e^{-x}) dx \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-t e^{-t} + 0 + \int_0^t e^{-x} dx \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-t e^{-t} + \left[-e^{-x} \right]_0^t \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-t e^{-t} - e^{-t} - (-e^{-0}) \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\underbrace{(1+t)}_{\rightarrow \infty} \underbrace{e^{-t}}_{\rightarrow 0} + 1 \right) = \cancel{\lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1+t}{e^t} + 1 \right)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1+t}{e^t} + 1 \right) = \text{l'Hôpital i 1:a termen} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\underbrace{e^t}_{\rightarrow 0}} + 1 \right) = \underline{\underline{1}}
 \end{aligned}$$

(alt. kan man inse att $(1+t)e^{-t} \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$,
eftersom exponentialfunktionen växer snabbare
än $1+t$ växer)

$$4 (b) \int \frac{1}{\sin(x)} dx = \int \frac{\sin(x)}{\sin(x)^2} dx = \int \frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)^2} dx$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = \cos(x) \\ du = -\sin(x) dx \end{array} \right\} = - \int \frac{1}{1 - u^2} du = \int \frac{1}{u^2 - 1} du$$

$$\frac{1}{u^2 - 1} = \frac{1}{(u+1)(u-1)} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u-1}$$

$$\Rightarrow A(u-1) + B(u+1) = 1$$

$$u=1 \Rightarrow 0A + 2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$u=-1 \Rightarrow -2A + 0B = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

Så

$$\int \frac{1}{\sin(x)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u-1} du - \frac{1}{2} \int \frac{1}{u+1} du$$

$$= \frac{1}{2} \ln(|u-1|) - \frac{1}{2} \ln(|u+1|) + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{\cos(x)-1}{\cos(x)+1}\right|\right) + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{\cos(x)-1}{\cos(x)+1}\right|\right) + C$$

$$= \ln\left(\sqrt{\left|\frac{\cos(x)-1}{\cos(x)+1}\right|}\right) + C$$

$$= \text{etc...}$$

många mer
eller mindre
litevändiga
fänkbara
svar

5 (a) Integrationsfaktor är $e^{\int 2t dt} = e^{t^2}$ så lösning är

$$y(t) = e^{-t^2} \int t e^{t^2} dt = \left\{ \begin{array}{l} u = t^2 \text{ i integralen} \\ du = 2t dt \Leftrightarrow \frac{1}{2} du = t dt \end{array} \right\}$$

$$= e^{-t^2} \int e^u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} e^{-t^2} (e^u + C) = \frac{1}{2} e^{-t^2} (e^{t^2} + C)$$

$$= \frac{1 + C e^{-t^2}}{2}$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow \frac{1 + C e^0}{2} = 1 \Rightarrow C = 1$$

Svar: $y(t) = \frac{1 + e^{-t^2}}{2}$

5(b) Ekvationen är separabel:

$$y'(x) = x e^{-y(x)} \Leftrightarrow e^{y(x)} y'(x) = x \Leftrightarrow \int e^{y(x)} y'(x) dx = \int x dx$$

$$\Leftrightarrow \int e^y dy = \int x dx \Leftrightarrow e^{y(x)} = \frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow y(x) = \ln\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

(c) Karakteristisk ekvation: $k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 1$

så homogendel är $y_h(x) = A e^x + B e^{-x}$.

Ansätt partikulärdel $y_p(x) = Cx + D$ (högerledet är polynom av grad 1)

$$\Rightarrow y_p'(x) = C, \quad y_p''(x) = 0. \quad \text{I ekvationen ger detta}$$

$$0 - Cx - D = x \Rightarrow C = -1, \quad D = 0 \Rightarrow y_p(x) = -x.$$

Alltså $y(x) = A e^x + B e^{-x} - x$.

$$y(0) = 1 \Rightarrow A + B = 1 \quad (1)$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow A e + \frac{B}{e} - 1 = 0 \Rightarrow A e^2 + B = e \quad (2)$$

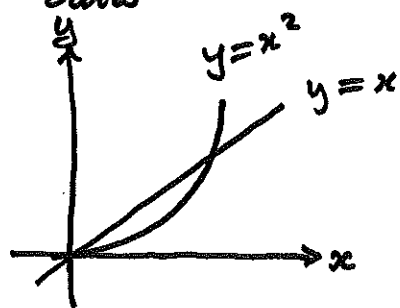
$$(2) - (1) \text{ ger } A(e^2 - 1) + B - B = e - 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{e-1}{e^2-1} = \frac{e-1}{(e-1)(e+1)} = \frac{1}{e+1}$$

$$\text{vilket i (1) ger } B = 1 - A = \frac{e+1}{e+1} - \frac{1}{e+1} = \frac{e}{e+1}$$

$$\text{Så } y(x) = \frac{e^x}{e+1} + \frac{e \cdot e^{-x}}{e+1} - x = \frac{e^x + e^{1-x}}{e+1} - x$$

6 Slutt



Skärningspunkter: $x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0$

$$\Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ resp. } x=1$$

För $0 \leq x \leq 1$ är $x \geq x^2$ så volymen är

$$\int_0^1 (\pi(x)^2 - \pi(x^2)^2) dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \pi \frac{5-3}{15} = \frac{2\pi}{15}$$

7. Låt $m(t)$ vara mängden läkemedel vid tid t i dygn.

Enligt antagandet om exponentiellt avtagande har vi

$$\frac{dm}{dt} = -km(t) \Leftrightarrow m(t) = m(0)e^{-kt} = 50e^{-kt}$$

$$\text{Vi har } m(1) = 10 \Leftrightarrow 50e^{-k \cdot 1} = 10 \Leftrightarrow e^{-k} = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow -k = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \quad \text{så } m(t) = 50e^{\ln\left(\frac{1}{5}\right)t}$$

$$= 50 \left(e^{\ln(1/5)} \right)^t = 50 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^t$$

$$m(2) = 50 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{50}{25} = 2$$

Svar: 2 milligram.

8. Det största antalet kartonger kan tillverkas när varje kartong kräver så lite papp som möjligt. Vi söker alltså minsta arean papp som krävs för att innesluta 32 l.

Vi har:

$$\text{Volym } V = s^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{s^2}$$

$$\text{Area } A = \underbrace{4sh}_{\text{sidorna}} + \underbrace{s^2}_{\text{botten}} \stackrel{\text{eul. ovan}}{=} \frac{4V}{s} + s^2$$

$$\frac{dA}{ds} = -\frac{4V}{s^2} + 2s = 0 \Rightarrow 2s^3 = 4V \Rightarrow s^3 = 2V$$

$$\Rightarrow s = \sqrt[3]{2V} = \left\{ V = 32 \text{ l} \Rightarrow 2V = 64 \text{ l} = 64 \text{ dm}^3 \right\} = 4 \text{ dm}$$

$$\frac{d^2A}{ds^2} = \frac{8V}{s^3} + 2 > 0 \quad \text{för alla } s > 0 \quad \text{så } s = 4 \text{ dm} \text{ märke}$$

motsvara, minimum för A .

globalt

$$A(4) = \frac{4 \cdot V}{4} + 4^2 = V + 16 = 48 \text{ dm}^2$$

$$\text{Antal lädor} = \frac{200 \text{ dm}^2}{48 \text{ dm}^2} = 4 + \frac{8}{48} = 4 + \frac{1}{6}$$

Svar: 4 hela lädor.