Matematisk analys LMA400

Idag: * Funktioner
* Inverse funktioner

Funktioner (1.1-1.3)

Def: Funktion f är en regel som till varje element $a \in D_f$ ordnar unikt element $f(a) \in M_f$

D_f: definitionsmängd

M_f: målmängd

$V_f = \{ f(x) \mid x \in D_f \} \subseteq M_f$: värdemängd

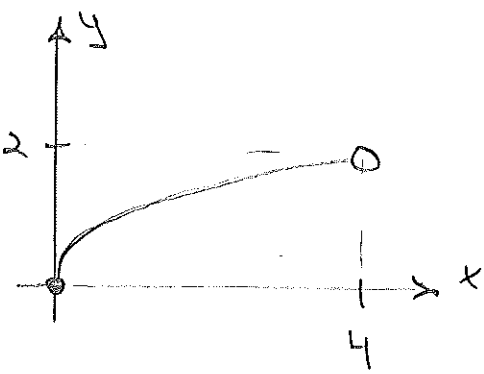
$$f : D_f \to V_f \ (M_f)$$

Def Grafen till f är $\{ (x, f(x)) \mid x \in D_f \}$

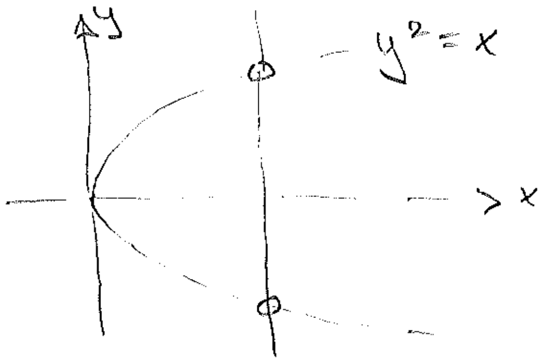
Ex $f : [0,4) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt{x}$

$D_f = [0,4)$ $V_f = [0,2)$



Ex



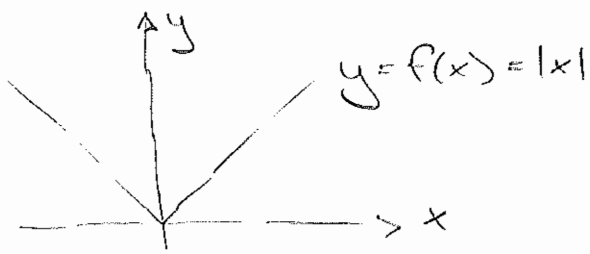
$y(x)$ inte unikt!

$\Rightarrow$ $y(x)$ inte funktion

$\rightsquigarrow$ Vertikallinjetestet!

Ex $f(x) = |x|$ $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



Egenskaper hos funktioner: Låt f vara funktion

* $f(-x) = f(x)$ jämn
* $f(-x) = -f(x)$ udda
* $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in I$

  f strängt växande på I
* $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in I$

  f strängt avtagande på I

Vanliga funktioner: Låt $n \in \mathbb{N}$ och $r \in \mathbb{R}$

Polynom: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$

Potenser: $f(x) = x^n, \; x^r, \; x^{1/n}, \; x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

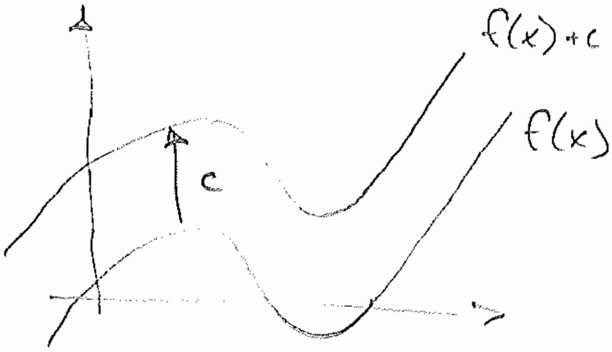
Rationella: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ P, Q polynom

Trigonometriska: $f(x) = \sin(x)$

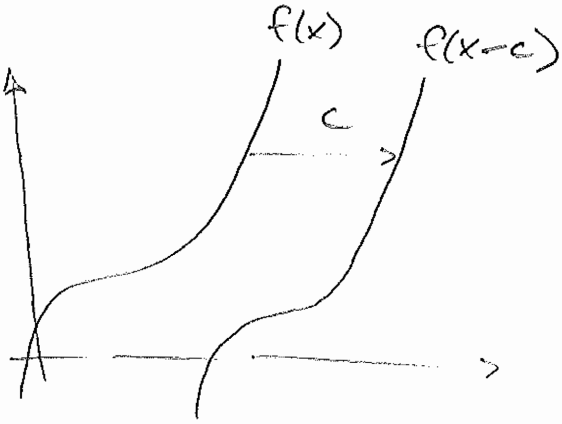
Exponentiella: $f(x) = a^x$, $a > 0$

Transformerade funktioner:

Translation: Låt $c \in \mathbb{R}$

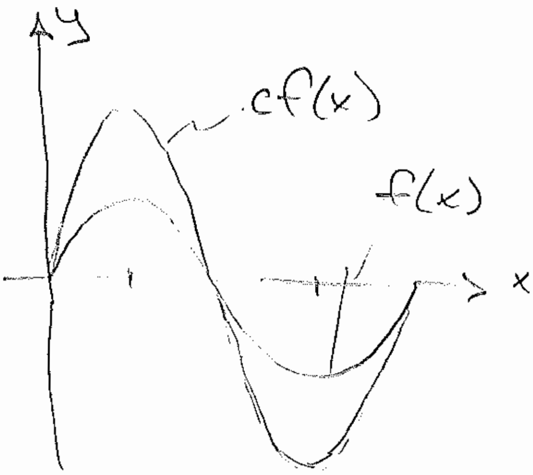


$$y = f(x) + c$$

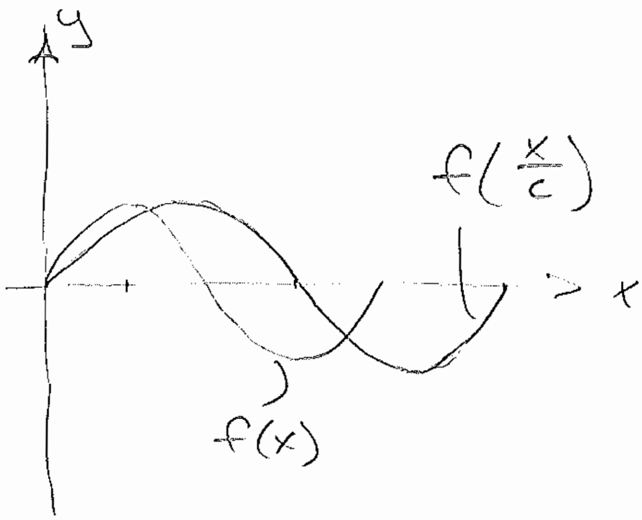


$$y = f(x-c)$$

Skalning: Låt $c \neq 0$



$$y = c\,f(x)$$



$$y = f\left(\frac{x}{c}\right)$$

Kombination av funktioner:

i) $f+g$; $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $\quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$

ii) fg ; $(fg)(x) = f(x)\,g(x)$ $\quad D_{fg} = D_f \cap D_g$

Sammansättning av funktioner:

$f \circ g$; $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ $\quad D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

Ex $f(x) = x^2 \quad g(x) = \sqrt{x} \qquad D_f = \mathbb{R} \quad D_g = [0,\infty)$

$h(x) = f(x) + g(x) = x^2 + \sqrt{x} \qquad D_h = \mathbb{R} \cap [0,\infty) = [0,\infty)$

$k(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2}{\sqrt{x}} \qquad D_k = [0,\infty) \setminus \{0\} = (0,\infty)$

Ex $f(x) = \sqrt{x} \quad g(x) = e^x \qquad D_f = [0,\infty) \quad D_g = \mathbb{R}$

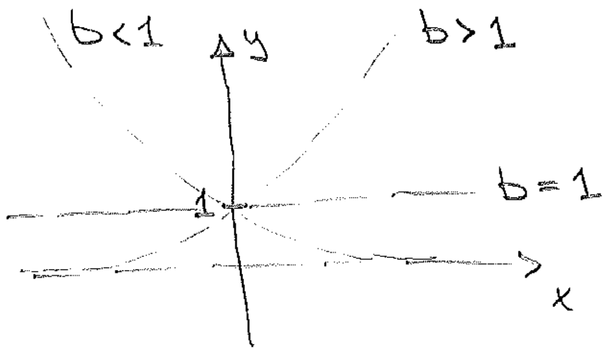
$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{e^x} = e^{x/2} \qquad D_{f\circ g} = \mathbb{R}$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = e^{\sqrt{x}} \qquad D_{g\circ f} = [0,\infty)$

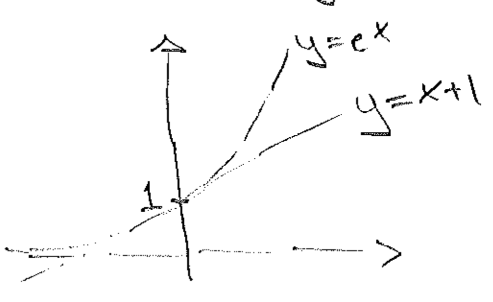
$\leadsto$ I allmänhet gäller $f \circ g \neq g \circ f$!

Exponentialfunktioner (1.4)

$f(x) = b^x, \quad b > 0, \quad x \in \mathbb{R}$



Def Talet e def. som basen för $f(x) = e^x$ s.a. tangenten i $(0,1)$ har lutning 1



$f(x) = e^x$ kallas naturliga exp. funktionen !

<u>Exponentiallagar:</u> $a, b > 0$ $x, y \in \mathbb{R}$

i) $b^{x+y} = b^x b^y$

ii) $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$

iii) $(b^x)^y = b^{xy}$

iv) $(ab)^x = a^x b^x$

Inversa funktioner (1.5)

<u>Def</u> Funktion f <u>injektiv</u> (eng. one-to-one) om

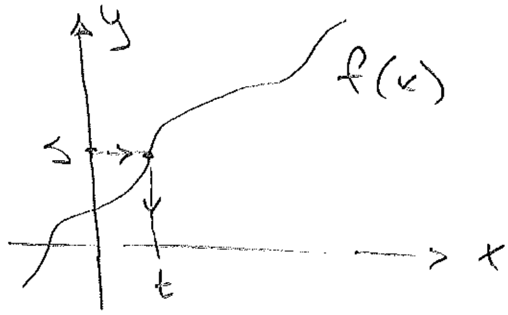
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D_f$$

$$\Leftrightarrow$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \qquad \text{— " —}$$

Om f injektiv har

$$f(x) = s$$



entydig lösning $t \in D_f \ \forall s \in V_f$

$\Rightarrow$ <u>Horisontallinjetestet</u>!

<u>Def</u>: Om f injektiv funktion har den <u>invers funktion</u> f^{-1} def. av

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x) \quad \forall y \in V_f$$

$$\Rightarrow \quad D_f = V_{f^{-1}}, \quad V_f = D_{f^{-1}}$$

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad f(f^{-1}(y)) = y$$

<u>Ex</u> Visa att $f(x) = 2x - 1$ är inverterbar och bestäm dess invers f^{-1}.

<u>Lösn</u>: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow f$ injektiv $\Rightarrow f$ inverterbar.

Låt $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x) = f(f^{-1}(y))$

$y = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2} = f^{-1}(y)$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}$

Om f kontinuerlig funktion gäller

f strängt växande/avtagande $\Leftrightarrow f$ injektiv!

<u>Logaritmer</u>

Låt $b > 0$, $b \neq 1$ Då är $f(x) = b^x$

strängt växande/avtagande

<u>Def</u>: Inversen till $f(x) = b^x$, $b > 0$, $b \neq 1$

kallas <u>logaritmen i basen b</u>

$$\log_b : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

$$\log_b y = x \Leftrightarrow y = b^x \quad x \in \mathbb{R}, y \in (0, \infty)$$

Ex $\log_b 1 = 0$

$\log_b(b^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$b^{\log_b x} = x \quad \forall x \in (0,\infty)$

Logaritmlagar: $a, b, x, y > 0 \quad a, b \neq 1$

i) $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$

ii) $\log_b(x^y) = y \log_b x$

iii) $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$

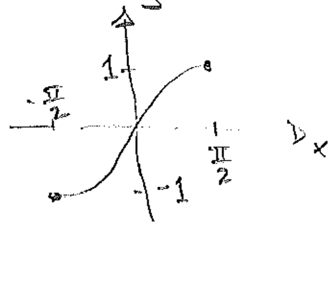
Naturliga logaritmen: $\ln(x) = y \iff x = e^y$

Inversa trigonometriska funktioner

Invertera icke-injektiva funktioner genom att begränsa def.mängden D_f

Ex $\sin(x)$ strängt växande på $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow \sin(x)$ injektiv på $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



Def: Inversa trig. funk.

arcsin : $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\qquad y = \sin(x) \Leftrightarrow x = \arcsin(y)$

arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$ $\qquad y = \cos(x) \Leftrightarrow x = \arccos(y)$

arctan : $\mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\qquad y = \tan(x) \Leftrightarrow x = \arctan(y)$

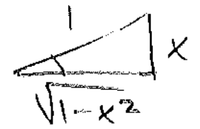
gäller endast för $x \in D_f$ $y \in V_f$

Ex

a) $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$

b) $\sin(\arcsin(2))$ ej def!

c) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$

d) $\tan(\arcsin(x)) = \Big\{$ 

$\Big\} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Ex Skissa $\tan(x)$ och $\arctan(x)$