Matematisk analys LMA400

Idag: * Gränsvärden

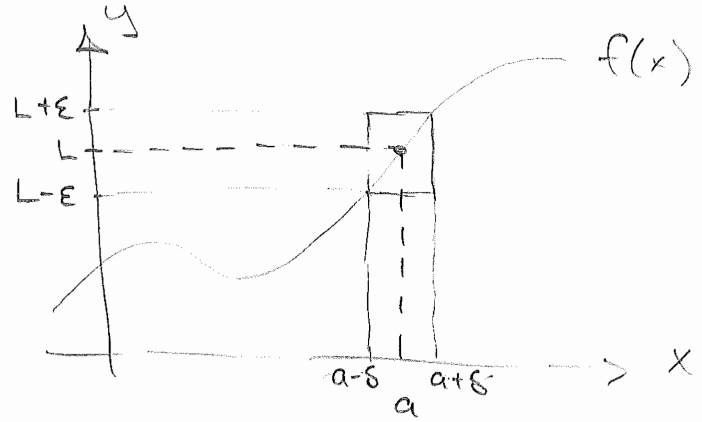
Gränsvärden (2.2 - 2.4)

Def: Låt $f(x)$ vara def. på öppet intervall runt $a \in \mathbb{R}$ (utom möjligen i a). Vi säger att $f(x)$ har gränsvärdet $L \in \mathbb{R}$ i a,

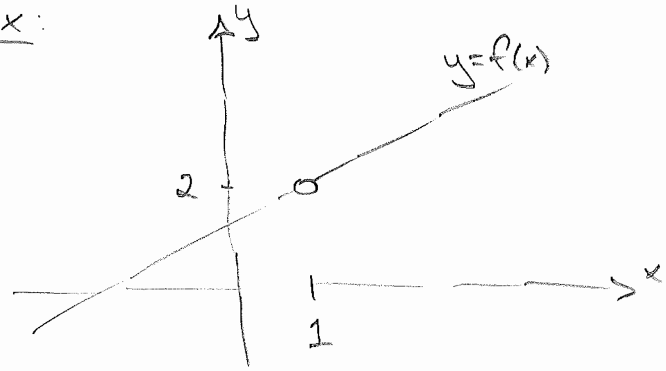
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

om $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Betydelse: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ betyder $f(x)$ "godtyckligt" nära L om x "tillräckligt" nära a



Ex:



$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = x+1 \qquad x \neq 1$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Def: Vi kan också def. höger- och vänstergränsvärden

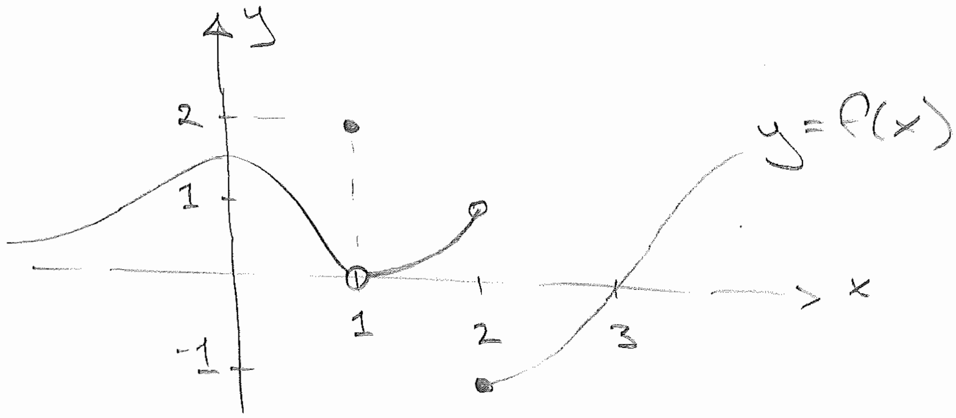
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \quad \text{om} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : a < x < a+\delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \text{om} \quad \text{— " —} : a-\delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Sats: $\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a^+} f(x) = L, \ \lim_{x \to a^-} f(x) = L$

om och endast om

Ex



x=1: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 0$

$$\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1) = 2$$

x=2: $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = -1$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{x \to 2} f(x)$$

Ex Visa att $\lim_{x \to 1} x^2 + x - 6 = -4$

Lösn: Låt $\varepsilon > 0$ vara givet och $f(x) = x^2 + x - 6$

samt $L = -4$, $a = 1$

$$|f(x) - L| = |x^2 + x - 6 + 4| = |x^2 + x - 2| = |x-1||x+2|$$

Antag $\delta \leq 1$, då har vi

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |x-1| < 1 \Rightarrow 0 < x < 2 \Rightarrow |x+2| < 4$$

$$\Rightarrow |f(x) - L| = |x-1||x+2| < 4|x-1|$$

Låt $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{4}, 1\right)$. Då gäller

i) $|x-a| < \delta \Rightarrow |x-1| < 1 \Rightarrow |f(x) - L| < 4|x-1|$

ii) $|x-a| < \delta \Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{4}$

$$\therefore \; |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

$\boxtimes$

Räkneregler för gränsvärden

Formell (ε, δ)-notation används vid bevisföring

För beräkning av gränsvärden används

följande räkneregler:

Sats: Låt f, g vara funktioner med

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \quad \lim_{x \to a} g(x) = M, \quad a, L, M \in \mathbb{R}$$

Då gäller att

i) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$

ii) $\lim_{x \to a} k f(x) = kL \quad \forall k \in \mathbb{R}$

iii) $\lim_{x \to a} f(x) g(x) = LM$

iv) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ om $M \neq 0$

v) $\lim_{x \to a} (f(x))^{m/n} = L^{m/n} \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} L > 0 \text{ if } n \in 2\mathbb{Z} \\ L \neq 0 \text{ if } m < 0 \end{cases}$

Tillsammans med resultaten $\lim_{x \to a} k = k \quad \forall k \in \mathbb{R}$ och $\lim_{x \to a} x = a$ kan vi nu beräkna gränsvärden:

Ex $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x + 4}{x^3 - 2x^2 + 7} = \{\text{Räkneregler}\} = \frac{2^2 + 2 + 4}{2^3 - 2 \cdot 2^2 + 7} = \frac{10}{7}$

Sats: Om f är polynom $(P(x))$ eller rationell $\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)$ och $a \in D_f$ gäller

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Sats (Teori-PH, Sats 1)

Antag att $\lim_{x \to a} f(x) = L$, $\lim_{x \to a} g(x) = M$

där $a, L, M \in \mathbb{R}$. Då gäller att

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$$

Bevis: Låt $\varepsilon > 0$ vara givet.

Vi vill visa att $\exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)+g(x)-(L+M)| < \varepsilon$

Vi använder Δ-olikheten $|a+b| \leq |a| + |b|$ $(*)$

$$\Rightarrow |f(x)+g(x)-(L+M)| = |(f(x)-L)+(g(x)-M)| \overset{(*)}{\leq} |f(x)-L| + |g(x)-M|$$

Låt $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$

$\lim_{x \to a} f(x) = L \Rightarrow \exists \delta_1 > 0 : 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\lim_{x \to a} g(x) = M \Rightarrow \exists \delta_2 > 0 : 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2}$

Låt nu $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow 0 < |x-a| < \delta_1$ och $0 < |x-a| < \delta_2$

$\Rightarrow |f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2}$ och $|g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2}$

Alltså gäller att $0 < |x-a| < \delta$

$$\Rightarrow |f(x)+g(x)-(L+M)| \leq |f(x)-L| + |g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\boxtimes$

Obestämda uttryck:

Uttryck "$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$", "$0 \cdot \infty$", "$\infty - \infty$"

vid direkt insättning kallas obestämda.

Gränsvärdet kan (om det existerar) då beräknas genom

* Algebraisk omskrivning
* Instängningsregeln

(* l'Hôpital) ← kommer senare!

Ex Beräkna $\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$

Lösn: $\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$ ← $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(\sqrt{t^2+9}-3)(\sqrt{t^2+9}+3)}{t^2(\sqrt{t^2+9}+3)} = \{\text{Konjugatregeln}\}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t^2} + \cancel{9} - \cancel{9}}{\cancel{t^2}(\sqrt{t^2+9}+3)} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2+9}+3} = \frac{1}{6}$$

Sats (Instängningsregeln)

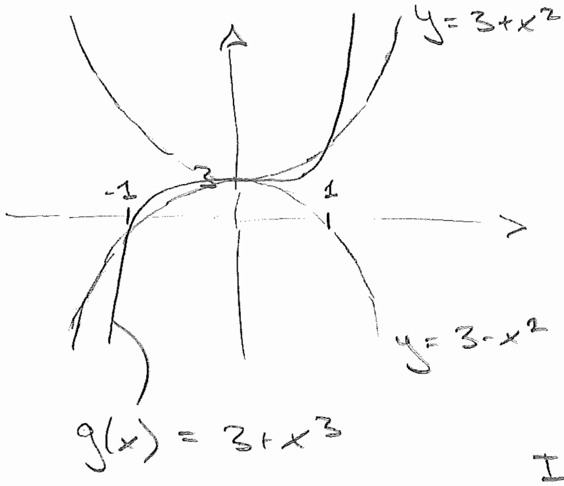
Om $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ på öppet intervall kring a (utom möjligtvis i a) och

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} g(x) = L$$

Ex Låt $f(x) = 3 - x^2$, $h(x) = 3 + x^2$ och $a = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} h(x) = 3$$



Låt $g(x) = 3 + x^3$

För $|x| < 1$ gäller $|x^3| < x^2$

$$\Rightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in (-1, 1)$$

$$\overset{IR}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} g(x) = 3$$

Ex Beräkna $\lim_{x \to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Lösn: $\lim_{x \to 0} x^2 \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\nexists \lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)}$ men $-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

$$\Rightarrow -x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

Dessutom har vi $\lim_{x \to 0} x^2 = \lim_{x \to 0} (-x^2) = 0$

$$\overset{IR}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Oegentliga gränsvärden

Existerar inte i egentlig mening, men kan ges formell def.

Def: Oegentliga (oändliga) gränsvärden

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \text{om} \quad \forall B>0\ \exists \delta>0 : 0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x) > B$$

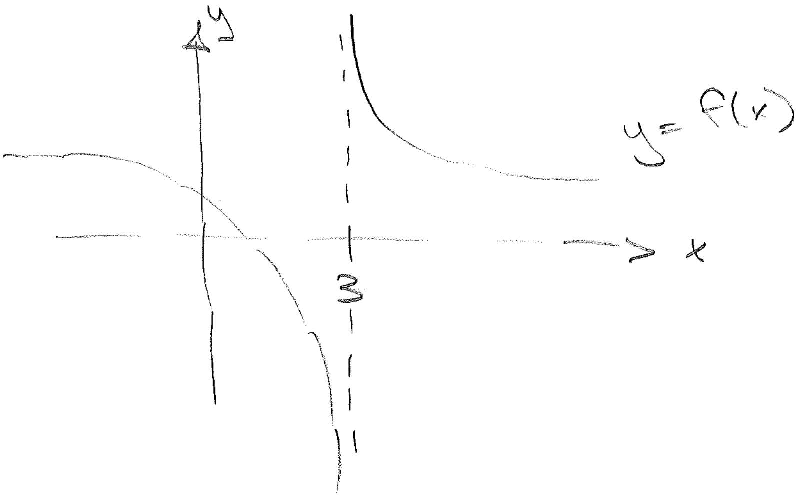
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \quad \text{om} \quad \forall B>0\ \exists \delta>0 : 0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x) < -B$$

Pss. för $\lim\limits_{x\to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$

Ex $f(x) = \dfrac{2x}{3-x}$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{2x}{\underbrace{3-x}_{>0}} = \infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{2x}{\underbrace{3-x}_{<0}} = -\infty$$



Def: Linjen $x=a$ kallas vertikal (lodrät) asymptot till funktion $f(x)$ om

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{eller} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$