Idag: * Kontinuitet
* Asymptoter

## Kontinuitet (2.5)

Def: Låt $f$ vara fkn. En punkt $x_0 \in D_f$ kallas inre punkt om $\exists\, a,b \in \mathbb{R}$ s.a. $x_0 \in (a,b)$ och $(a,b) \in D_f$. En punkt $x_0 \in D_f$ som inte är inre punkt kallas ändpunkt.

Def: Låt $f$ vara fkn. och $a \in D_f$ inre punkt. Då är $f$ kontinuerlig i $a$ om

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

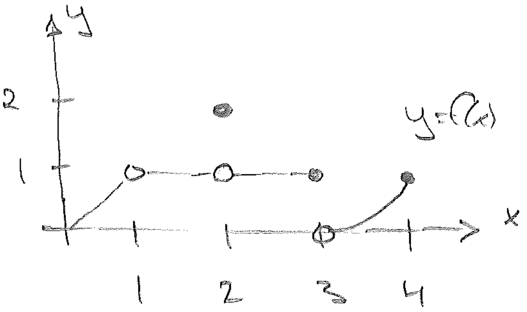
Om i) $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$, eller

ii) $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

är $f$ diskontinuerlig i $a$.

Sterkort: Om $\nexists f(a)$ kallas $f$ också disk. i $a$. Vanligt att bara prata om kontinuitet i $a \in D_f$

__Ex__




$\underline{x=1}$: $f$ disk. ty $1 \notin D_f$

$\underline{x=2}$: $f$ disk. ty $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$

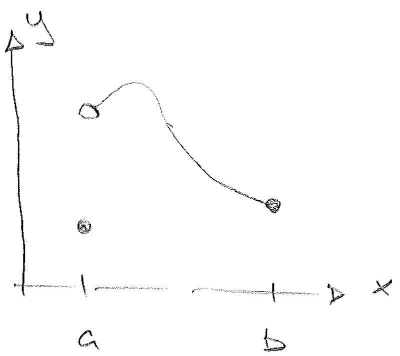
$\underline{x=3}$: $f$ disk. ty $\nexists \lim\limits_{x\to 3} f(x)$

__Def.__ Funktion $f$ höger- resp. vänsterkont. i $a \in D_f$ om

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{(höger)}$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) \quad \text{(vänster)}$$

__Ex__




$\underline{x=a}$: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq f(a)$

ej högerkont. i $a$

$\underline{x=b}$: $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

vänsterkont. i $a$

__Def__ i) Funktion $f$ __kont. på intervall__ $I$ om

$f$ kont. i alla inre punkter $a \in I$

och höger/vänsterkont. i eventuella ändpunkter

ii) Funktion $f$ __kont.__ om $f$ kont. $\forall a \in D_f$

__Sats:__ Följande funktioner kont. (där de är def.)

i) Polynom ii) Rationell iii) Trig. iv) Exp. v) Log.

Sats: Om $f, g$ kont. i $a$ är följande funk. också kont. i $a$:

i) $f+g$ iii) $fg$

ii) $kf$, $k \in \mathbb{R}$ iv) $\frac{f}{g}$ om $g(a) \neq 0$

Bevis: Räkneregler för gränsvärden!

$\rightsquigarrow$ Det finns mänga kontinuerliga funktioner!

Sammansatta funktioner:

Sats: i) Låt $f$ vara kont i $b$

$$\lim_{x \to a} g(x) = b \implies \lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = f(b)$$

ii) Låt $g$ vara kont i $a$, och $f$ kont. i $g(a)$

$$\implies (f \circ g)(x) = f(g(x)) \text{ kont. i } a.$$

Ex Beräkna $\lim_{x \to 1} \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$

Lösn: Har $f \circ g$ med $f(x) = \arcsin(x)$, $g(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

och $D_f = [-1, 1]$ $D_g = [0,1) \cup (1, \infty)$

$\implies g$ ej def. (kont.) i $x = 1$

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x \to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(1-x)}}{\cancel{(1-x)}(1+\sqrt{x})} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{2}$$

$$\overset{i)}{\Rightarrow} \lim_{x\to 1} \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

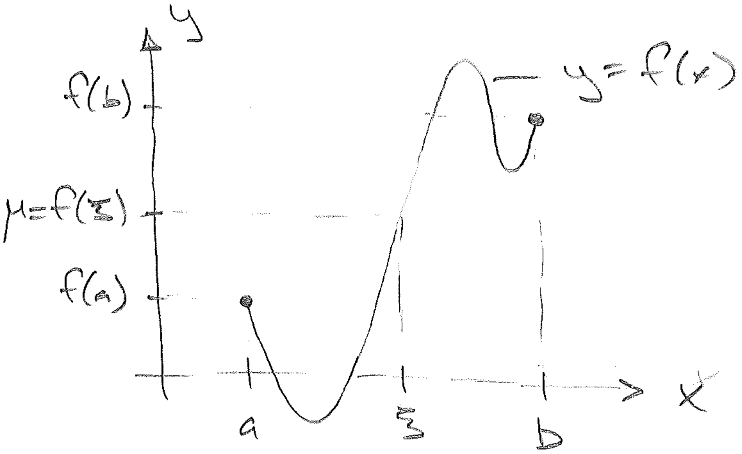
## Egenskaper hos kont. fnk.

**Sats:** (Satsen om mellanliggande värden) [SMV]

Antag $f$ kont. på $[a,b]$

Då antar $f$ alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$

$$\forall \mu \in [f(a), f(b)] \quad \exists \xi \in [a,b] : \quad \mu = f(\xi)$$




existensteorem!

**Ex** Har $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + \frac{1}{2}$ nollställen på $[-1,1]$?

**Lösn:** $P(x)$ kont. $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow P(x)$ kont. på $[-1,1]$

$$P(-1) = -\frac{1}{2} \qquad P(1) = \frac{11}{2}$$

$$\overset{SMV}{\Longrightarrow} \exists \xi \in [-1,1] : \quad P(\xi) = 0$$

$\therefore$ $P(x)$ har (reellt) nollställe på $[-1,1]$!

$\leadsto$ Intervallhalvering! $\left(P(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \exists \xi \in [-1,0] : P(\xi) = 0\right)$

# Asymptoter (2.6)

Gränsvärden för $f(x)$ då $x \to \pm\infty$

Def: Låt $f$ vara def. på $(a, \infty)$.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

om $\forall \varepsilon > 0 \ \exists R > 0 : x > R \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Pss för $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

Ex Beräkna $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2+bx}$

Lösn: $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2+bx}$ ← $[\infty - \infty]$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^2} + ax - \cancel{x^2} - bx}{(\sqrt{x^2+ax} + \sqrt{x^2+bx})} = \lim_{x \to \infty} \frac{x(a-b)}{\sqrt{x^2+ax} + \sqrt{x^2+bx}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(a-b)}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{a}{x}}_{\to 0}} + \sqrt{1+\underbrace{\frac{b}{x}}_{\to 0}}} = \frac{a-b}{1+1} = \frac{a-b}{2}$$

Def: Linjen $y = L$ kallas horisontell (vågrät) asymptot till $f(x)$ om

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \quad \text{eller} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Ex Bestäm asymptoter för $f(x)=\dfrac{1+x^4}{x^2-x^4}$

Lösn: $f(x)=\dfrac{1+x^4}{x^2(1-x^2)}$ $\quad D_f=\mathbb{R}\setminus\{0,\pm 1\}$

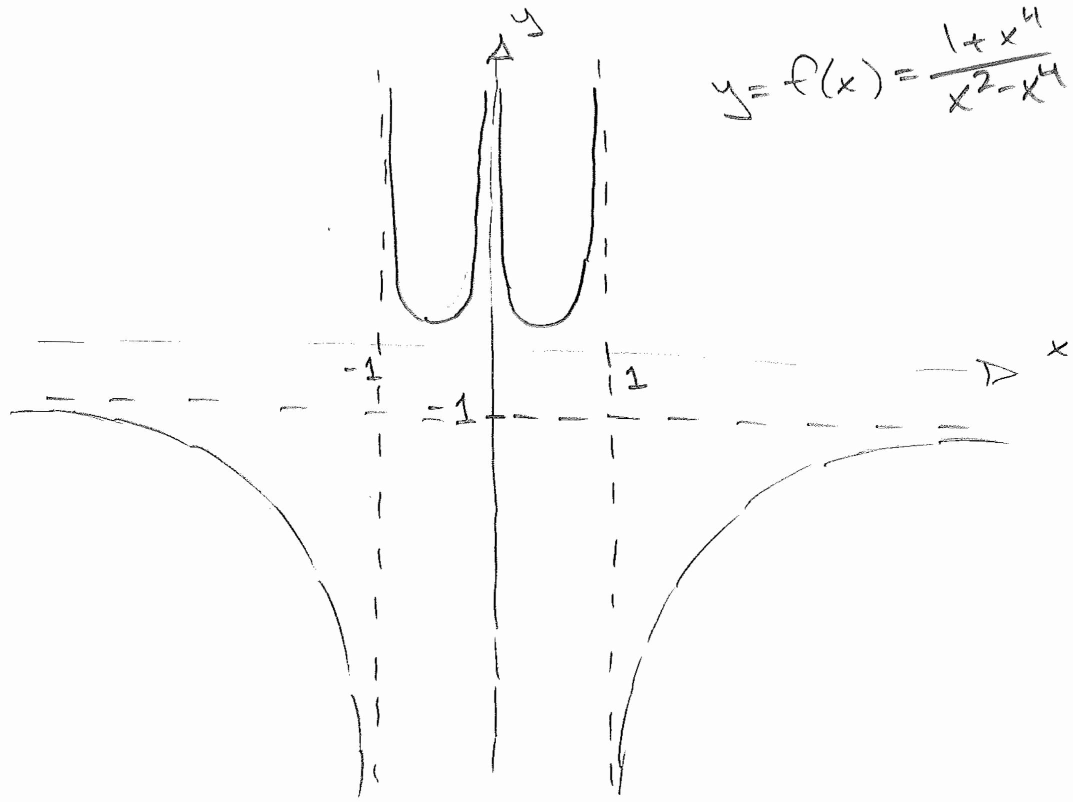
i) Lodräta: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x^4}{x^2\underbrace{(1-x^2)}_{>0}}=\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1+x^4}{x^2\underbrace{(1-x^2)}_{<0}}=-\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1+x^4}{x^2\underbrace{(1-x^2)}_{>0}}=\infty$

$\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1+x^4}{x^2\underbrace{(1-x^2)}_{>0}}=\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1+x^4}{x^2\underbrace{(1-x^2)}_{<0}}=-\infty$

ii) Vågräta: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1+x^4}{x^2(1-x^2)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\overbrace{\frac{1}{x^4}}^{\to 0}+1}{\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}-1}=-1$

$\Rightarrow$




$x=-1,0,1$ lodräta asymptoter

$y=-1$ vågrät asymptot