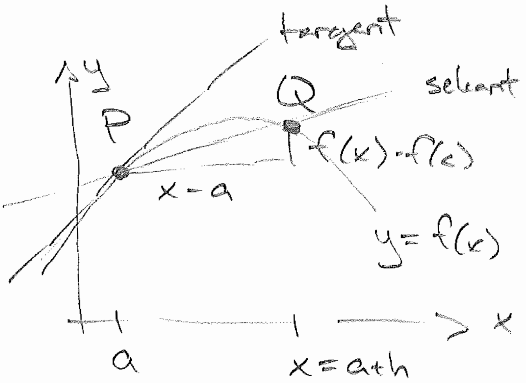
Matematisk analys LMA400

Idag: * Derivata och förändringshastighet

* Derivata som funktion

Derivata och förändringshastighet (2.7)

Låt f vara funktion och betrakta sekantlinjen mellan P och Q.



$$P = (a, f(a))$$

$$Q = (x, f(x))$$

differens-kvot

$$k_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Då $Q \to P$ fås tangentlinjen.

Def: Tangenten till $f(x)$ i $P=(a, f(a))$ är räta linjen genom P med lutning

$$k = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x=a+h}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Ex Låt $s=f(t)$ vara positionen för objekt

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$$ medelhastighet $[t_1, t_2]$, $t_2 > t_1$

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$ momentan hastighet.

Med $f(t) = \frac{1}{2}gt^2$ (Fritt fall) fås

$$\bar{v} = \frac{\frac{1}{2}g(t_2^2 - t_1^2)}{t_2 - t_1} = \frac{1}{2}g\frac{(t_2+t_1)\cancel{(t_2-t_1)}}{\cancel{(t_2-t_1)}} = g\frac{t_1+t_2}{2}$$

$$v(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}g(\cancel{t^2}+2ht+h^2-\cancel{t^2})}{h}$$

$$= \frac{1}{2}g\lim_{h\to 0}(h+2t) = gt$$

Notera: $v(t_1) = \lim_{t_2\to t_1}\bar{v}(t_1, t_2)$

__Def:__ Derivatan till $f(x)$ i $a \in D_f$ ges av

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(h)}{h} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

om gränsvärdet existerar. Då kallas f __deriverbar__ i a

$\Rightarrow$ Tangenten till $y = f(x)$ i $P = (a, f(a))$ är linjen genom P med lutning $f'(a)$.

__Förändringshastighet:__

I analogi med hastighet som förändring av position pratar vi om __förändringshastighet__ av $y = f(x)$ map x:

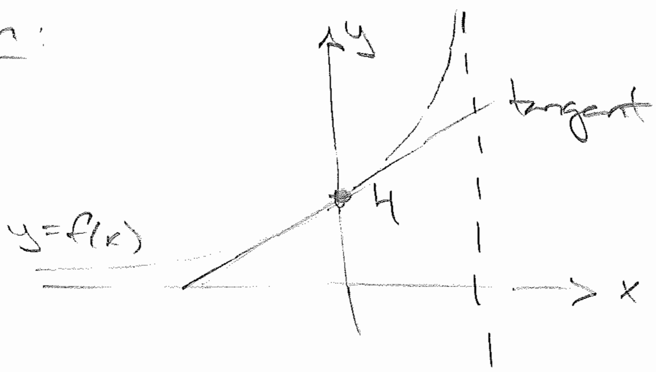
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} =$$ genomsnittlig förändringshastighet map x över $[a, a+h]$

$$y'(a) = f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} =$$ momentan förändringshastighet map x i $x = a$.

$\Rightarrow$ Momentan förändringshastighet av $f(x)$ map x i $x=a$ ges av $f'(a)$.

<u>Ex</u> Bestäm tangenten till $y = f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{1-x}}$ i $(0,4)$.

<u>Lösn:</u>



$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{4}{\sqrt{1-h}} - \frac{4}{\sqrt{1}}}{h}$$

$$= 4 \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1-\sqrt{1-h}}{h\sqrt{1-h}} = 4 \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{1}-(\cancel{1}-h)}{\cancel{h}\sqrt{1-h}\,(1+\sqrt{1-h})}$$

$$= 4 \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-h}\,(1+\sqrt{1-h})} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

Tangentens ekvation: $y - f(0) = f'(0)(x-0)$

$$\Rightarrow \quad y = f'(0)x + f(0) = 2x + 4$$

Derivatan som funktion (2.8)

Låt $f(x)$ vara funktion. Då är derivatan

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

funktion med $D_{f'} = \{x \in D_f \mid \exists f'(x)\}$

Beteckning: $f'(x) = \frac{df}{dx} = Df(x)$

$$f'(a) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} = Df(a)$$

Funktion $f(x)$ deriverbar på (a,b) om deriverbar $\forall x \in (a,b)$

Funktion $f(x)$ deriverbar om deriverbar $\forall x \in D_f$

Ex Bestäm derivatan till $f(x) = \frac{4}{\sqrt{1-x}}$

Lösn: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{4}{\sqrt{1-x-h}} - \frac{4}{\sqrt{1-x}}}{h}$

$$= 4 \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x-h}}{h\sqrt{1-x}\sqrt{1-x-h}} \quad \left[\frac{0}{0}\right] \quad = 4 \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{1}-\cancel{x} - (\cancel{1}-\cancel{x}-h)}{h\sqrt{1-x}\sqrt{1-x-h}\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x-h}\right)}$$

$$= 4 \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1-x-h}\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x-h}\right)} = 2 \frac{1}{(1-x)^{3/2}}$$

Två centrala egenskaper hos funktion:

i) Kontinuitet ii) Deriverbarhet

<u>Sats</u> (Teori-PM, Sats 2)

Om f är deriverbar i $a \in D_f$ är f även kontinuerlig i a.

<u>Bevis</u>: Eftersom f deriverbar i a existerar

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Vi vill visa att $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Från räkneregler för gränsvärden följer

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} [f(x) - f(a) + f(a)]$$

$$= \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] + \lim_{x \to a} f(a)$$

$$= \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) \right] + f(a)$$

$$= \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] \cdot \lim_{x \to a} [x - a] + f(a)$$

$$= f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a)$$

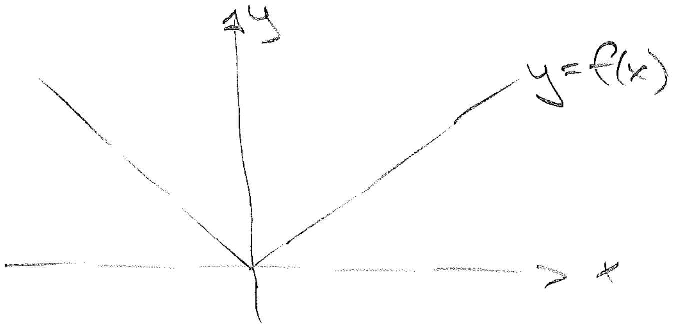
$$\therefore \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$\blacksquare$

Det omvända gäller <u>inte</u>; dvs

$$f \text{ kont. i } a \not\Rightarrow f \text{ deriverbar i } a$$

<u>Ex</u> $f(x) = |x|$ kont. men ej deriverbar i $x=0$



$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ kont. i } x=0$$

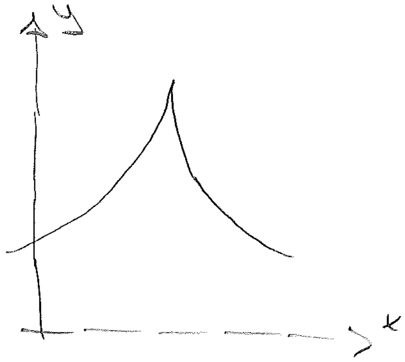
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \{x>0\} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \{x<0\} = \lim_{h \to 0^-} -\frac{h}{h} = -1$$

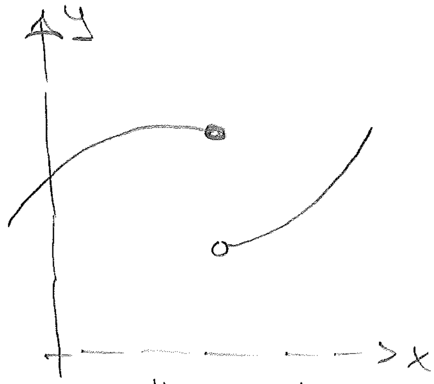
$$\Rightarrow \nexists \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ <u>ej</u> deriverbar i $x=0$.

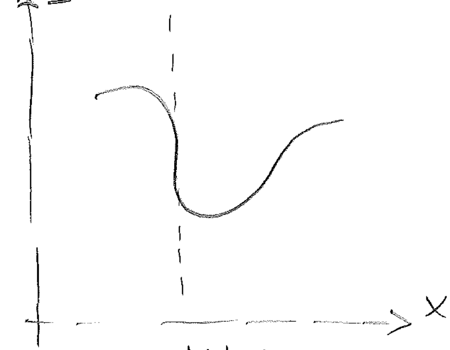
Funktion kan vara ej deriverbar av flera skäl:



"hack"



"hopp"



vertikal tangent

Högre ordningens derivator

Vi har sett att derivatan f' till f också är funktion. Om $f'(x)$ är deriverbar kallar vi dess derivata för <u>andraderivatan</u> $f''(x)$ av $f(x)$.

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

Högre ordningens derivator av $y = f(x)$

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) \longleftarrow \text{"hastighet"}$$

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} f(x) \longleftarrow \text{"acceleration"}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$