Idag: * Derivata av polynom och exp.
* Derivata av produkt och kvot

Polynom och exponentialfunktioner (3.1)

Regler för att beräkna derivator utan $\lim_{h \to 0}$

Från def. av derivata följer direkt:

$$\frac{d}{dx}(c) = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R} \text{ konstant}$$

Visa detta!

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

Polynom: $P(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$

Sats: $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1} \quad n \in \mathbb{Z}_+$ positiva heltal

Bevis: $f(x) = x^n$ Låt $a \in \mathbb{R}$ $(= D_f)$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1})}{(x-a)}$$

faktoriseringsregler!

$$= \left\{ \text{Räkneregler för } \lim_{x \to a} \right\}$$

$$= a^{n-1} + a^{n-2} \cdot a + \ldots + a \cdot a^{n-2} + a^{n-1} = n \cdot a^{n-1}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$$

$\blacksquare$

Vad händer om $n \notin \mathbb{Z}_+$?

Ex: Beräkna $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx} x^{-1}$

Lösn: $$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} - (\cancel{x}+h)}{h x (x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h} x (x+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx} x^{-1} = (-1) \cdot x^{-2}$$

dvs följer samma mönster som för $n \in \mathbb{Z}_+$!

Sats: $\frac{d}{dx} x^n = n \cdot x^{n-1} \qquad n \in \mathbb{R}$

Bevis: Kommer senare!

Ex Låt $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \qquad g(x) = \frac{1}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{3/2}\right) = \frac{3}{2} x^{-1/3} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-3} = -2\frac{1}{x^3}$$

För att derivera polynom behöver vi även

<u>Sats</u>: Låt f, g vara deriverbara i x

$\frac{d}{dx}$ linjär operator på rummet av funkt!

i) $$\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}f(x)$$

ii) $$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

<u>Bevis</u>: Följer direkt från räkneregler för gränsvärde!

ii) $$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

$\boxtimes$

$\Rightarrow$ Nu har vi alla verktyg vi behöver för att derivera $P(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$

Ex Derivera $P(x) = x^6 + 4x^5 + 21x^2 + 3x + 8$

Lösn: $P'(x) = \frac{d}{dx}(x^6) + 4\frac{d}{dx}(x^5) + 21\frac{d}{dx}(x^2) + 3\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(8)$

$= 6x^5 + 4 \cdot 5x^4 + 21 \cdot 2x + 3 \cdot 1 + 0$

$= 6x^5 + 20x^4 + 42x + 3$

Exponentialfunktion

Vi betraktar $f(x) = b^x$, $b > 0$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{b^{x+h} - b^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{b^x(b^h - 1)}{h} = b^x \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{b^h - \overset{=b^0}{1}}{h}}_{= f'(0)}$$

$\Rightarrow \quad f'(x) = f(x) \cdot f'(0)$ dvs $f'(x) \propto f(x)$

Vi definierade $f(x) = e^x$ naturliga exp. funktionen så att lutningen av tangenten till $y = e^x$ i $x = 0$ var $k = 1$, dvs $f'(0) = 1$

$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx} e^x = e^x$

Med gränsvärden kan vi uttrycka def. av

Def Talet e def. av $\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

Produktregeln (3.2)

Hur deriveras vi produkter / kvoter av funktioner?

Sats: (Teori-PM, Sats 3) [Produktregeln]

Låt f, g vara deriverbara i x. Då gäller

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Bevis: Från def. av derivata har vi

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]$$

Vi använder nu f, g deriverbara i x

$\Rightarrow$ i) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existerar

ii) $g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$ existerar

iii) g kont. i x, dvs $\lim_{h \to 0} g(x+h) = g(x)$

Från räkneregler för gränsvärde följer då

$$(fg)'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\xrightarrow[h \to 0]{} f'(x)} \underbrace{g(x+h)}_{\xrightarrow[h \to 0]{} g(x)} + f(x) \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\xrightarrow[h \to 0]{} g'(x)} \right]$$

$$= f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x) \qquad \boxtimes$$

Ex Derivera $F(x) = x^3 e^x$

Lösn: $F(x) = f(x)\, g(x)$ med $f(x) = x^3$ $g(x) = e^x$

Vi har att $f'(x) = 3x^2$ och $g'(x) = e^x$

$$\Rightarrow F'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$$

$$= 3x^2 e^x + x^3 e^x = e^x (3x^2 + x^3)$$

Sats: Antag f, g deriverbara i x. Då gäller

i) $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$ om $f(x) \neq 0$

ii) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ om $g(x) \neq 0$

← kvotregeln

Bevis: i) $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h\, f(x) f(x+h)} = \lim_{h\to 0}\left(-\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot \frac{1}{f(x)f(x+h)}\right)$$

Använder f deriverbar i x

$\Rightarrow$ i) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

ii) f kont. i x, $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -f'(x) \cdot \frac{1}{(f(x))^2}$$

ii) Följer direkt från Produktregeln + i) !

$\boxtimes$

Ex
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2}\right) = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$