Idag: * Derivata av trigonometriska funktioner

* Kedjeregeln

Derivata av trigonometriska funktioner (3.3)

Vi vill beräkna $\frac{d}{dx}\sin(x)$ etc.

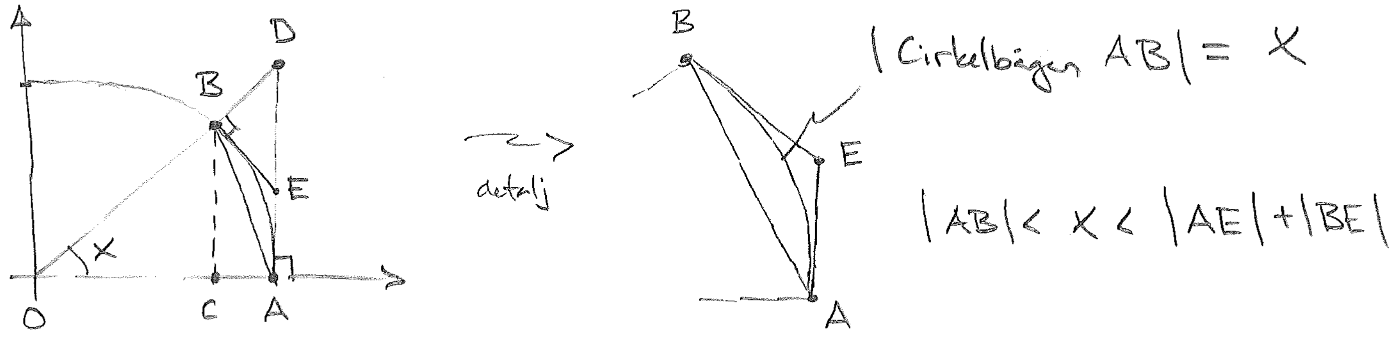
Trigonometriska derivator kan härledas från följande gränsvärde:

Sats (Teori-PM, Sats 4)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$ ← x i radianer!

Bevis: Geometriskt bevis

Betrakta först $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}$ och låt $0 < x < \frac{\pi}{2}$



$A = (1,0)$ $B = (\cos x, \sin x)$

$C = (\cos x, 0)$ $D = (1, \tan x)$

Vi har då följande olikheter ($x > 0$, $\sin x > 0$, $\cos x > 0$)

i) $\sin x = |BC| < |AB| < x \implies \frac{\sin x}{x} < 1$

ii) $\underbrace{\tan x}_{= \frac{\sin x}{\cos x}} = |AD| > |AE| + |BE| > x \implies \frac{\sin x}{x} > \cos x$

$$\implies \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Vi har också $\lim_{x \to 0^+} 1 = 1$ och $\lim_{x \to 0^+} \cos x = 1$

ty $\cos(x)$ kontinuerlig.

Instängningsregeln $\implies \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (*)$

Betrakta sedan

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Låt } y = -x \\ x \to 0^- \implies y \to 0^+ \end{array} \right\} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\sin(-y)}{(-y)}$$

$$= \{ \sin(-y) = -\sin(y) \} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\sin y}{y} \overset{(*)}{=} 1 \quad (**)$$

$$(*), (**) \implies \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

∎

<u>Ex</u> Beräkna $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$

<u>Lösn:</u> $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \to 0} 2 \frac{\sin(2x)}{2x} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Låt } y = 2x \\ x \to 0 \implies y \to 0 \end{array} \right\}$

$$= 2 \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 2 \cdot 1 = 2$$

Ex Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$

Lösn: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{3} \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot \frac{3x}{\sin(3x)}$

$$= \frac{2}{3} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right) \cdot \lim_{x\to 0}\left(\frac{3x}{\sin(3x)}\right) = \frac{2}{3}\cdot 1 \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{3}$$

För att beräkna $\frac{d}{dx}\sin x$ behöver vi även följande resultat:

$$\frac{d}{dx}(\cos x)\Big|_{x=0} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \leftarrow \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{(\cos^2 h - 1)}^{= -\sin^2 h}}{h(\cos h + 1)}$$

$$= -\lim_{h\to 0}\left(\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 1} \cdot \frac{\sin h \to 0}{(\cos h + 1) \to 2}\right) = \{\sin x, \cos x \text{ kont}\}$$

$$= -1 \cdot \frac{0}{2} = 0$$

Nu kan vi (äntligen) derivera de trigonometriska funk:

$$\frac{d}{dx}\sin x = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \left\{\begin{array}{c}\text{additions-}\\ \text{formeln}\end{array}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin x \cosh + \sinh \cos x - \sin x}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\sin x \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} + \cos x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1}\right) =$$

$$= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

Samma metod kan vi använda på resterande trig. funkt.

$$\frac{d}{dx}\cos x = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos x\cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\cos x \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} - \sin x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1}\right)$$

$$= -\sin x$$

kvotregeln

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

<u>Kedjeregeln</u> (3.4)

I praktiken behöver vi ofta derivera sammansatta funktioner $f\circ g(x) = f(g(x))$.

<u>Sats</u>: (Kedjeregeln)

Antag g deriverbar i a och f deriverbar i $g(a)$. Då gäller

$$(f\circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot \underbrace{g'(a)}_{\text{"inre derivata"!}}$$

Bevis: Vi definierar hjälpfunktion

$$H(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t)-f(b)}{t-b}, & t \neq b \\ f'(b), & t = b \end{cases}$$

i) $\lim_{t \to b} H(t) = \lim_{t \to b} \dfrac{f(t)-f(b)}{t-b} = f'(b) = H(b)$

$\Rightarrow$ H kont. i $t=b$ $(*)$

ii) $f(t)-f(b) = H(t)(t-b) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Låt nu $t = g(x)$ och $b = g(a)$

$$(f \circ g)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x-a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{H(g(x))(g(x)-g(a))}{x-a}$$

Använder g deriverbar i a $\Rightarrow$ g kont. i a

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} g(x) = g(a) \Rightarrow t \xrightarrow[x \to a]{} b \quad (**)$$

$$\Rightarrow (f \circ g)'(a) \overset{(**)}{=} \lim_{t \to b} H(t) \cdot \lim_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$\overset{(*)}{=} H(b) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

$\boxed{3}$

<u>Ex</u> $f(x) = \sqrt{x^2+3x} = (x^2+3x)^{1/2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2+3x)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2+3x)$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+3x)^{-1/2} \cdot (2x+3)$$

$$= \frac{1}{2} \; \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x}}$$

Vi kan använda kedjeregeln för att derivera

$$f(x) = b^x \quad , \quad b > 0$$

$g(x) = e^x$
$h(x) = \ln b \cdot x$
$f(x) = g(h(x))$

$$f(x) = b^x = (e^{\ln b})^x = e^{\ln b \cdot x}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(b^x) = \frac{d}{dx}\left(e^{\ln b \cdot x}\right)$$

$$= e^{\ln b \cdot x} \cdot \frac{d}{dx}(\ln b \cdot x) = b^x \cdot \ln b$$

<u>Ex</u> $f(x) = \sin(\cos(x))$

$$f'(x) = \cos(\cos(x)) \cdot \frac{d}{dx} \cos x$$

$$= \cos(\cos(x)) \cdot (-\sin x)$$

$$= -\sin(x) \cdot \cos(\cos(x))$$