

- Idag:
- * Implicit deriving
 - * Derivata av logaritmer

Implicit deriving (3.5)

Vi vet hur vi bestämmer lutningen hos kurvor som är graf till funktion $y = f(x)$

Många kurvor ges inte som grafen till funktion, hur bestämma lutningen för dessa?

I allmänhet ges kurvor av ekvation

$$F(x, y) = 0 \quad (*)$$

Implicit deriving: y ges implicit som funktion av x genom $(*)$

→ Derivera $(*)$ med x och betrakta y som funktion $y(x)$

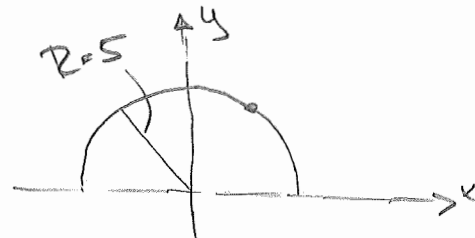
→ Lös för $y'(x)$ för att bestämma lutningen.

Ex

$$y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sqrt{25 - x^2})$$

$$y'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}} (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$$



Ex

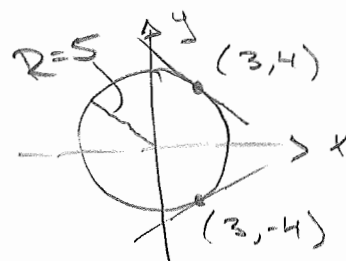
$$x^2 + y^2 = 25$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

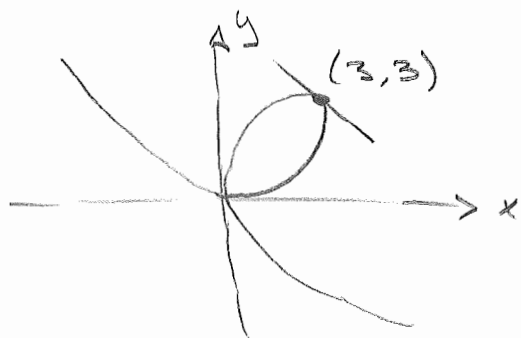
$$2x + 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

I punkten $(3, 4)$: $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$

— " — $(3, -4)$: $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}$



Ex



$$x^3 + y^3 = 6xy$$

$$\frac{d}{dx} \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 y' = 6y + 6xy'$$

$$\Rightarrow y'(3y^2 - 6x) = (6y - 3x^2)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(6y - 3x^2)}{(3y^2 - 6x)} = \frac{(2y - x^2)}{(y^2 - 2x)}$$

I punkten $(3, 3)$: $y' = -1$

Derivata av invers (inte i Stewart)

Låt $f(x)$ vara funktion med invers $f^{-1}(x)$

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) = f(y(x))$$

Derivera implicit $\frac{d}{dx}$: $1 = f'(y(x)) \cdot y'(x)$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Detta kan vi använda för att derivera
inversa trigonometriska funktioner:

Ex $y = \arcsin(x) \Leftrightarrow x = \sin(y) \quad \begin{matrix} x \in [-1, 1] \\ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{matrix}$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}} 1 = \cos(y(x)) \cdot y'(x)$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{1}{\cos(y(x))} = \left\{ \cos y \geq 0 \text{ för } y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(y(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Ex $y = \arctan(x) \Leftrightarrow x = \tan(y) \quad \begin{matrix} x \in \mathbb{R} \\ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{matrix}$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}} 1 = (1 + \tan^2(y(x))) \cdot y'(x)$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(y(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Pss f'_x = övriga derivator (steuvärde)

$$\frac{d}{dx}(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\arccos(x)) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}$$

Derivata av logaritmfunktion (3.6)

Vi kan använda implicit derivering även för logaritmfunktioner:

$$y(x) = \log_b x \iff x = b^{y(x)} \quad b > 0$$

$$\begin{aligned} \xRightarrow{\frac{d}{dx}} \quad 1 &= \frac{d}{dx}(b^{y(x)}) = \frac{d}{dx}(e^{\ln b \cdot y(x)}) \\ &= e^{\ln b \cdot y(x)} \cdot \frac{d}{dx}(\ln b \cdot y(x)) = b^{y(x)} \cdot \ln b \cdot y'(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{1}{b^{y(x)} \ln b} = \frac{1}{x \ln b}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\log_b x) = \frac{1}{x \ln b}$$

Speciellt har vi med $b=e$: $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

Ex $f(x) = \ln(|x|) = \begin{cases} \ln x, & x \geq 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases} = \frac{1}{x}$$

Logaritmisk derivering:

I allmänhet har vi sambandet

$$\frac{d}{dx} (\ln g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Kan användas för att bestämma derivatan till $y = f(x)$

1) Logaritmera (naturlig log)

2) Derivera implicit

3) Lös för y'

Ex Derivera $y = (\sqrt{x})^x$

Lösning: $D_f = [0, \infty)$ $V_f = [0, \infty)$

$$\ln y = \ln(\sqrt{x}^x) = x \ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} x \ln x$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}} \frac{1}{y} y' = \frac{1}{2} (\ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = \frac{1}{2} (\ln x + 1)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2} (\ln x + 1) \cdot y = \frac{1}{2} (\ln x + 1) \sqrt{x}^x$$

Om $\exists x \in D_f : f(x) < 0$ använder vi
istället $|y| = |f(x)|$.

Satz: Låt $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = n x^{n-1}$$

Basis: Låt $y = x^n$ $x \neq 0$

$$\ln |y| = \ln |x^n| = \ln |x|^n = n \ln |x|$$

$$\stackrel{\frac{d}{dx}}{\Rightarrow} \frac{y'(x)}{y(x)} = n \frac{1}{x} \Rightarrow y'(x) = n \frac{y(x)}{x} = n x^{n-1} \quad \square$$

Talet e som gränsvärde $\leftarrow$ på nytt
sätt!

$$\text{Låt } f(x) = \ln(x)$$

$$\text{Vi har då } f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(1) = 1$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(h+1) - \ln(\bar{1})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln(h+1) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln(1+h)^{1/h} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \ln(1+h)^{1/h} = 1$$

Nu använder vi att e^x kontinuerlig samt kontinuitets-
egenskaper hos sammansatt funktioner:

$$\Rightarrow e = \lim_{h \rightarrow 0} e^{\ln(1+h)^{1/h}} = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h}$$

Ofta gör vi variabelbytet

$$n = \frac{1}{h}, \quad h > 0 \Rightarrow n \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \infty$$

$$\Rightarrow e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

alternativ
def. av talet e !