Idag:
* Exponentiell tillväxt
* Kopplade förändringshastigheter
* Linjära approximationer

Exponentiell tillväxt (3.8)

Betrakta situation där förändring av storhet $y(t)$ är proportionell mot $y(t)$

$$y'(t) = k\, y(t)$$

=> Differentialekvation, dvs samband mellan obekant funktion och dess derivator.

Ex Populationsmodeller $P(t)$ = populationsstorlek

Varje individ (bakterie, cell, flodhäst) producerar avkomma. Nya individer per tidsenhet $\propto$ befintliga individer

$$\frac{dP}{dt} = kP \iff k = \frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$$

relativ tillväxt!

Sats: Diff.ekv. $y'(t) = k\, y(t)$, $k \in \mathbb{R}$ konst $(*)$

har lösningarna $y(t) = C \cdot e^{kt}$, $C \in \mathbb{R}$ konst.

Vi ser att $y(t) = Ce^{kt}$ satisfierar $(*)$:

$$y'(t) = Ce^{kt} \cdot \frac{d}{dt}(kt) = k \cdot Ce^{kt} = k\,y(t)$$

Konst. k, C bestäms av funktionsvärden vid två givna tidpunkter t_1, t_2.

Speciellt ser vi att $y(0) = C \cdot e^{0 \cdot t} = C$

$$\Rightarrow \quad C = y(0)$$

Ex Världens befolkning $P(t)$ $(t=0 \quad 1950)$

$P(0) = 2560 \qquad P(10) = 3040 \qquad [t] = \text{år}$

$[P] = 10^6$ ind.

Antag $P'(t) = k\,P(t)$

$$\Rightarrow \quad P(t) = P(0)\,e^{kt}$$

$$P(t_1) = P(0)\,e^{kt_1} \Rightarrow e^{kt_1} = \frac{P(t_1)}{P(0)}$$

$$\Rightarrow kt_1 = \ln\left(\frac{P(t_1)}{P(0)}\right) \Rightarrow k = \frac{1}{t_1}\ln\left(\frac{P(t_1)}{P(t_0)}\right)$$

Med $t_1 = 10$: $k = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{P(10)}{P(0)}\right) = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{3040}{2560}\right)$

$\approx 0{,}017$ dvs 1,7% årlig tillväxt!

Ex Radioaktivt sönderfall

Halveringstid $t_{1/2}$: $m(t) = m_0 \, 2^{-t/t_{1/2}}$

$$m(t) = m_0 \, e^{\ln 2 \cdot (-t/t_{1/2})} = m_0 \, e^{t \cdot (-\ln 2 / t_{1/2})}$$

$$\Rightarrow \quad k = -\frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

För ^{226}Cs är $t_{1/2} = 1540$ år

$\Rightarrow \quad k \approx -4 \cdot 10^{-4}$ dvs massan / strålningen avtar med 0,4% år.

Ex Ränta

Initialt kapital: A_0 Ränta: r per år

Årlig: $A(t) = A_0 (1+r)^t$ t antal år

Periodisk: $A(t) = A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}$ t antal perioder $\frac{1}{n}$ år

Kontinuerlig: $A(t) = \lim_{n \to \infty} \left(A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t} \right)$

$$= A_0 \left(\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r} \right)^{rt}$$

$$= \{ \text{def. av talet } e \text{ !} \}$$

$$= A_0 \, e^{rt}$$

Kopplade förändringstakter (3.9)

Problem där två eller flera storheter

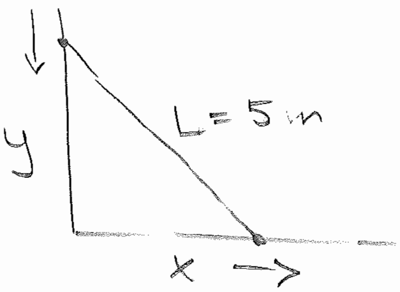
i) beror på "tiden" t

ii) är relaterade genom ekvation

$\Rightarrow$ Implicit derivering map t ger relation mellan förändringshastigheter

Ex Stege lutad mot vägg. Hur fort glider toppen nedåt då foten är 3 m från väggen och glider bort med 1 m/s?

Lösn.



Givet: $x(t_1) = 3$ m

$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_1} = 1$ m/s

Sökt: $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_1}$

Relation: $x^2 + y^2 = 25$ (Pythagoras)

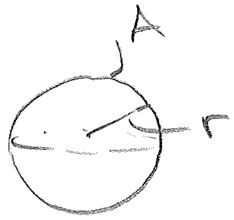
$$\xrightarrow{\frac{d}{dt}} 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow y(t_1) = \sqrt{25 - x(t_1)^2} = 4 \text{ m}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_1} = -\frac{x(t_1)}{y(t_1)}\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_1} = -\frac{3}{4}\cdot 1 = -\frac{3}{4} \text{ m/s}$$

Ex Hur snabbt förändras radien av sfär då radien är 10cm och arean minskar med $1 cm^2/min$?

Lösn:



Givet: $r(t_1) = 10$ cm

$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=t_1} = -1 cm^2/min$

Sökt: $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=t_1}$

$A(t) = 4\pi r(t)^2$

$$\overset{\frac{d}{dt}}{\Longrightarrow} \quad \frac{dA}{dt} = 4\pi \cdot 2r(t) \frac{dr}{dt}$$

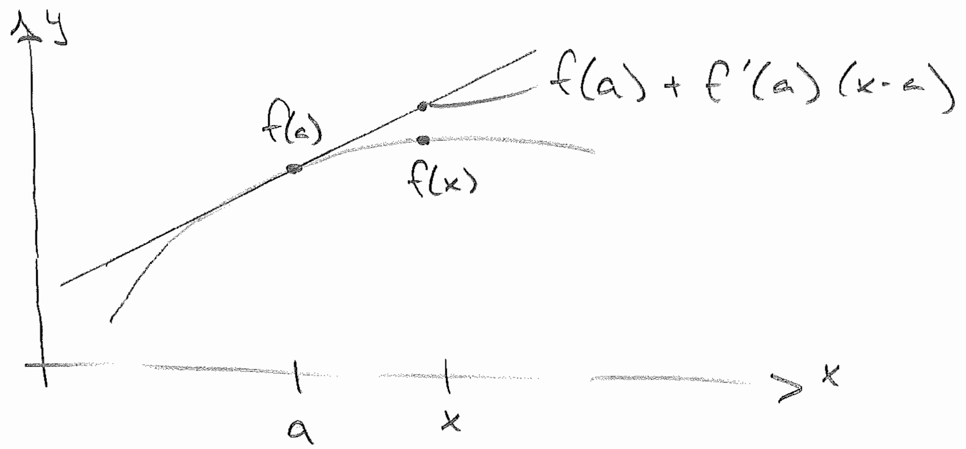
$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{8\pi r(t)} \frac{dA}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=t_1} = \frac{1}{8\pi r(t_1)} \left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=t_1} = \frac{1}{80\pi} \cdot (-1) = -\frac{1}{80\pi} \text{ cm/min}$$

$\therefore$ Radien minskar med $\frac{1}{80\pi}$ cm/min.

Linjär approximation (3.10)

Vi kan använda derivatan $f'(a)$ för att approximera funktion $f(x)$ nära $x = a$:



Tangentens ekvation: $(y - f(a)) = f'(a)(x-a)$

$$\Rightarrow \quad f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

kalles <u>linjär approximation</u> av $f(x)$.

Tangenten kalles <u>lineariseringen</u> $L(x)$ av funktionen $f(x)$ kring $x = a$.

<u>Ex</u> Bestäm linearisering av $f(x) = \sqrt{x+3}$ kring $x = 1$ och använd för att approximera $\sqrt{3.98}$

Lösn: $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+3}}$ $\quad f(1) = \sqrt{4} = 2$

$f'(1) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

Linearisering: $(L(x) - f(1)) = f'(1)(x-1)$

$\Rightarrow L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-1) = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$

$\Rightarrow \sqrt{x+3} \approx \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$ nära $x = 1$

$\Rightarrow \sqrt{3{,}98} = \sqrt{\underbrace{0{,}98}_{x}+3} \approx \frac{0{,}98}{4} + \frac{7}{4} \approx 1{,}995$

Differentialer:

Låt $y = f(x)$ och inför oberoende variabel

dx och beroende variabel

$$dy = f'(x)\,dx$$

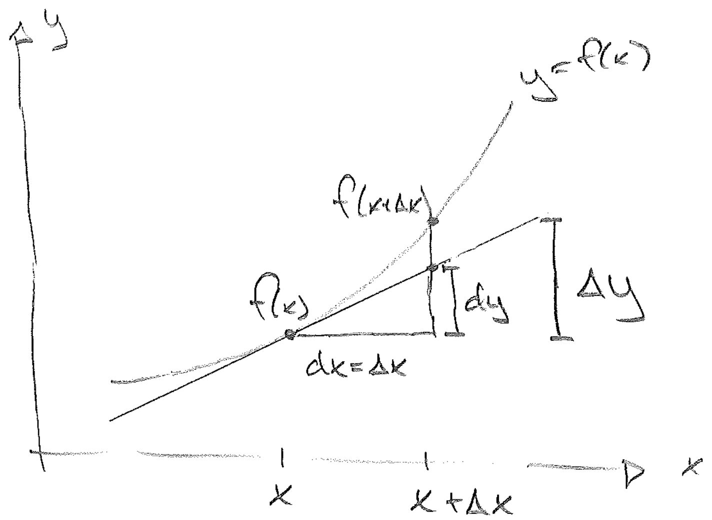
$f'(x) = \frac{dy}{dx}$ förklarar vår notation!

Variabler dx, dy kallas differentialer och

kan användas för att uppskatta förändring

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

vid förändring $dx = \Delta x$ i x:



$$\Delta y \simeq dy = f'(x)\,dx$$ linjär approximation av Δy!

<u>Ex</u> Uppskatta förändringen av $f(x)=\sqrt{x+3}$ vid $x=1$ mha av differentialer och beräkna $\sqrt{3.98}$

$$dy = f'(x)\,dx$$

I punkten $x=1$ har vi alltså

$$dy = f'(1)\,dx = \frac{dx}{2\sqrt{x+3}}$$

$\Rightarrow \sqrt{3.98} = \sqrt{0{,}98+3} \Rightarrow$ $dx = \Delta x = -0{,}02$

$$\Rightarrow dy = -\frac{0.02}{2\sqrt{1+3}} = -0{,}005$$

$$\Rightarrow \sqrt{3{,}98} = f(0{,}98) \simeq f(1) + dy$$

$$= 2 - 0{,}005 = 1{,}995$$